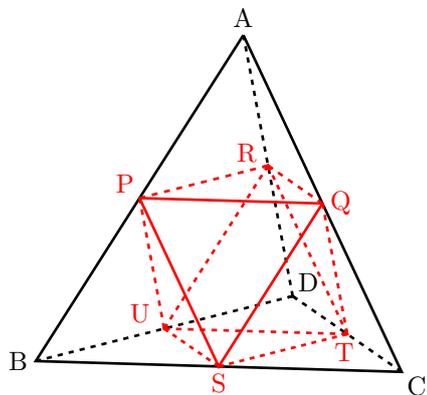


# 反射テスト 立体図形 正多面体 正四面体と正八面体の関係 01

1. 三角すい  $ABCD$  は全て同じ長さの辺をもつ正四面体である. 各辺の中点を図のように  $P, Q, R, S, T, U$  として結び, 正八面体  $PQRSTU$  (下図赤線) を作る. 指示されたものを求めよ.

(  $S$  級 35 秒,  $A$  級 1 分,  $B$  級 1 分 40 秒,  $C$  級 2 分 20 秒 )



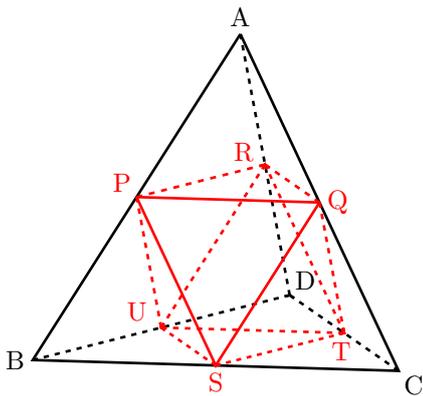
- (1) 小さい正四面体  $APQR$  は 大きい正四面体  $ABCD$  の体積の何倍か.

- (2) 正八面体  $PQRSTU$  は 大きい正四面体  $ABCD$  の体積の何倍か.

- (3) 大きい正四面体  $ABCD$  と 正八面体  $PQRSTU$  の表面積比.

2. 三角すい ABCD は全て同じ長さの辺をもつ正四面体である. 各辺の中点を図のように P,Q,R,S,T,U とし、正八面体 PQRSTU (下図赤線) を作る. 指示されたものを求めよ.

( S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 1 分 50 秒, C 級 2 分 40 秒 )



- (1) 大きい正四面体 ABCD , 小さい正四面体 APQR , 正八面体 PQRSTU の体積比.

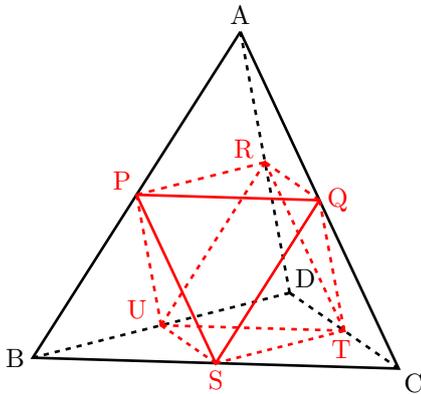
- (2) 大きい正四面体 ABCD , 小さい正四面体 APQR , 正八面体 PQRSTU の表面積比.

- (3) 小さい正四面体 APQR と 正八面体 PQRSTU の体積の和が  $60 \text{ cm}^3$  のとき, 大きい正四面体 ABCD の体積.

# 反射テスト 立体図形 正多面体 正四面体と正八面体の関係 01 解答解説

1. 三角すい ABCD は全て同じ長さの辺をもつ正四面体である. 各辺の中点を図のように P,Q,R,S,T,U として結び, 正八面体 PQRSTU (下図赤線) を作る. 指示されたものを求めよ.

( S 級 35 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 40 秒, C 級 2 分 20 秒 )



## ★正四面体と正八面体の関連性

正四面体 ABCD (大正四面体 とよぼう.) が左図のようにあるとき, 各辺の中点を結んだ立体 PQRSTU は **★正八面体** である.

三角すい APQR, PBSU, QSCT, RUTD は合同で, これも正四面体である. これらを小正四面体とよぼう.

大正四面体 ABCD の体積を 1 とすると, これら小正四面体は, 相似比 2 : 1 であるから, 体積は  $\frac{1}{2}$  の 3 乗で,  $\frac{1}{8}$ .

よって,

$$\begin{aligned} \text{正八面体の体積} &= \text{大正四面体} - \text{小正四面体} \times 4 \\ &= 1 - \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

☆小正四面体の体積は 大正四面体の  $\frac{1}{8}$ ,

**★正八面体の体積** は 大正四面体の  $\frac{1}{2}$ .

- (1) 小さい正四面体 APQR は 大きい正四面体 ABCD の体積の何倍か.

相似比 2 : 1 だから, 体積比は,  $2^3 : 1^3 = 8 : 1$

よって, 倍率は  $1 \div 8 = \frac{1}{8}$ .

- (2) 正八面体 PQRSTU は 大きい正四面体 ABCD の体積の何倍か.

正八面体は, 大正四面体から小正四面体を 4 つとったもの.

(1) から,  $1 - \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$ .

- (3) 大きい正四面体 ABCD と 正八面体 PQRSTU の表面積比.

正三角形 PQR の面積を 1 とする.

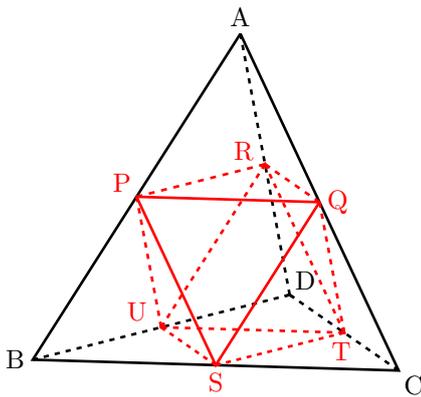
大正四面体 ABCD の 1 面の面積は 4 であるから, 表面積は  $4 \times 4 = 16$ .

正八面体の表面積は正三角形 PQR と同じものが 8 面あるので,  $1 \times 8 = 8$ .

よって, 表面積比は  $16 : 8 = 2 : 1$ .

2. 三角すい ABCD は全て同じ長さの辺をもつ正四面体である. 各辺の中点を図のように P,Q,R,S,T,U とし、正八面体 PQRSTU ( 下図赤線 ) を作る. 指示されたものを求めよ.

( S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 1 分 50 秒, C 級 2 分 40 秒 )



### ★ 正四面体と正八面体の関連性

正四面体 ABCD ( 大正四面体 とよぼう. ) が左図のようにあるとき、各辺の中点を結んだ立体 PQRSTU は **★正八面体** である.

三角すい APQR, PBSU, QSCT, RUTD は合同で、これも正四面体である. これらを小正四面体とよぼう.

大正四面体 ABCD の体積を 1 とすると、これら小正四面体は、相似比 2 : 1 であるから、体積は  $\frac{1}{2}$  の 3 乗で、 $\frac{1}{8}$ .

よって、

$$\begin{aligned} \text{正八面体の体積} &= \text{大正四面体} - \text{小正四面体} \times 4 \\ &= 1 - \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

☆小正四面体の体積は 大正四面体の  $\frac{1}{8}$ ,

**★正八面体の体積** は 大正四面体の  $\frac{1}{2}$ .

- (1) 大きい正四面体 ABCD , 小さい正四面体 APQR , 正八面体 PQRSTU の体積比.

$$1 : \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = 8 : 1 : 4 .$$

- (2) 大きい正四面体 ABCD , 小さい正四面体 APQR , 正八面体 PQRSTU の表面積比.

正三角形 PQR の面積を 1 とする.

大正四面体 ABCD の 1 面の面積は 4 であるから、表面積は  $4 \times 4 = 16$  .

小正四面体 ABCD の 1 面の面積は 1 であるから、表面積は  $1 \times 4 = 4$  .

正八面体の表面積は正三角形 PQR と同じものが 8 面あるので、 $1 \times 8 = 8$  .

よって、表面積比は  $16 : 4 : 8 = 4 : 1 : 2$  .

- (3) 小さい正四面体 APQR と 正八面体 PQRSTU の体積の和が  $60 \text{ cm}^3$  のとき、大きい正四面体 ABCD の体積.

(1) から、大正四面体、小正四面体、正八面体の体積をそれぞれ  $\boxed{8}$  ,  $\boxed{1}$  ,  $\boxed{4}$  とする.

$\boxed{1} + \boxed{4} = \boxed{5}$  が  $60 \text{ cm}^3$  であるから、

$$\boxed{1} = 60 \text{ cm}^3 \div 5 = 12 \text{ cm}^3 .$$

よって、大正四面体 ABCD の体積は  $\boxed{8} = 12 \text{ cm}^3 \times 8 = 96 \text{ cm}^3$  .