

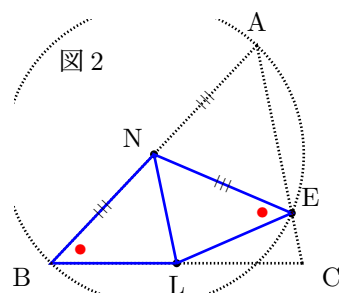
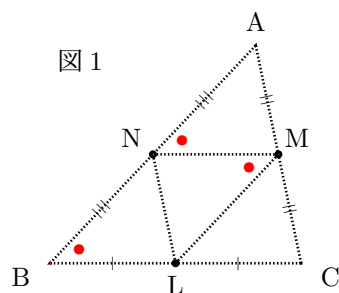
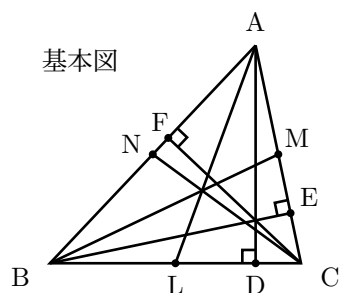
反射テスト 平面図形 証明 九点円 01

1. 三角形 ABC において、辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。また、各頂点 A, B, C から下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。これら 6 点すべてを通る円があることを証明せよ。 (S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 14 分, C 級 20 分)

2. 三角形 ABC において、各頂点 A, B, C から下ろした垂線の足を D, E, F とする。また 3 本の垂線はただ 1 つの交点をもち、この交点を垂心という。ここでは垂心を点 H とする。 AH, BH, CH の中点をそれぞれ P, Q, R とする。これら 6 点 D, E, F, P, Q, R すべてを通る円があることを証明せよ。
(S 級 8 分, A 級 12 分, B 級 18 分, C 級 25 分)

反射テスト 平面図形 証明 九点円 01 解答解説

1. 三角形 ABC において、辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。また、各頂点 A, B, C から下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。これら 6 点すべてを通る円があることを証明せよ。 (S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 14 分, C 級 20 分)



証明

中点連結定理から、 $NM \parallel BC$.

錯角も同位角も等しいので、 $\angle LMN = \angle ANM = \angle NBL$. (図 1 の赤点)

$\triangle NEL$ と $\triangle NBL$ の合同を証明する. (図 2 の青線)

N を中心にして直径 AB の円を考えると、 $\angle AEB = 90^\circ$ だから、E はこの円周上にあるので、 $NE = NB$.

同様に、中心 L、直径 BC の円を考えて、 $LE = LB$.

3 組の辺がそれぞれ等しいから、 $\triangle NEL \equiv \triangle NBL$.

対応する角度が等しいので、 $\angle NEL = \angle NBL$. (図 2 の赤点)

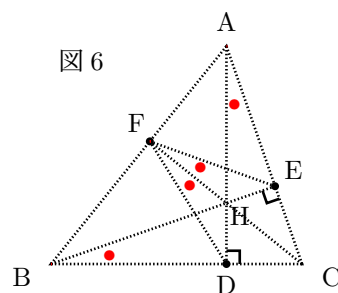
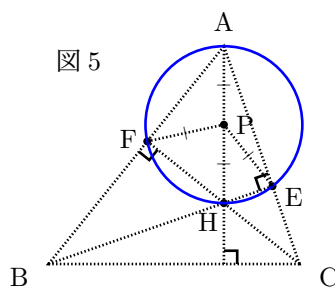
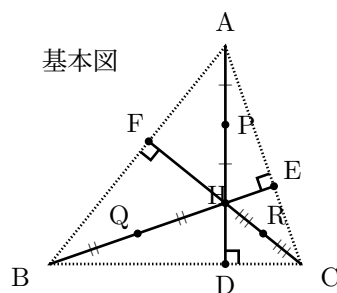
以上の結果から、 $\angle LMN = \angle LEN$ となり、円周角の定理の逆から、4 点 L, M, N, E は同一円周上にある。

対称性から、L, M, N, F も同一円周上にあり、L, M, N, D も同一円周上にある。

L, M, N を通る円は 1 通りしかないから、これらの 3 つの円は一致する。

つまり、6 点 L, M, N, D, E, F は同一円周上にある。

2. 三角形 ABC において、各頂点 A,B,C から下ろした垂線の足を D,E,F とする。また 3 本の垂線はただ 1 つの交点をもち、この交点を垂心という。ここでは垂心を点 H とする。AH,BH,CH の中点をそれぞれ P,Q,R とする。これら 6 点 D,E,F,P,Q,R すべてを通る円があることを証明せよ。
(S 級 8 分, A 級 12 分, B 級 18 分, C 級 25 分)



証明

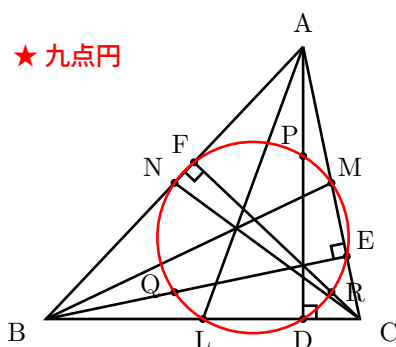
二角相等から、 $\triangle CAD \sim \triangle CBE$.
対応する角は等しいので、 $\angle CAD = \angle CBE = a$ とする .

$\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ であるから、中心 P, 直径 AH の円を描けば、A,H,E,F が同一円周上にある。(図 5 の青円)
円周角の定理より、 $\angle EPH = 2a$ かつ $\angle EFH = \angle EAH = a$.

同様にして、中心 Q, 直径 BH の円から、B,H,F,D が同一円周上にあり、 $\angle HFD = \angle HBD = a$.

以上から、 $\angle EPH = \angle EFH + \angle HFD = \angle EFD$
円周角の定理の逆から、4 点 D, E, F, P は同一円周上にあることがわかる。

対称性から、4 点 D, E, F, Q も、4 点 D, E, F, R も同一円周上にある。
D,E,F を通る円は 1 通りしかないから、これらの 3 つの円は一致する。
つまり、6 点 D, E, F, P, Q, R は同一円周上にある。



★ 九点円 (オイラー円 ・ フォイエルバッハ円)

前ページ、このページの証明から、 $\triangle ABC$ に対して、次の 9 点が同一円周上にあることがわかった。

- ・ 3 辺の中点 L, M, N
- ・ 3 頂点から対辺への垂線の足 D, E, F
- ・ 垂心と 3 頂点の中点 P, Q, R

これら 9 点の通る円を **九点円** という。発見者にちなんで、**オイラー円** (英: *Euler's circle*) ・ **フォイエルバッハ円** (英: *Feuerbach circle*) ともいう。