反射テスト　平面図形　証明　六点円の定理　01

1.　$\triangle$ABC の 3 頂点から対辺への垂線の足をそれぞれ A',B',C' とする．A' から辺 CA,AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P,Q, B' から辺 AB,BC に下ろした垂線の足をそれぞれ R,S, C' から辺 BC,CA に下ろした垂線の足をそれぞれ T,U とする．また, 3 つの垂線の交点である垂心を H とする．　（ S 級 8 分, A 級 12 分, B 級 26 分, C 級 25 分 ）

（1）　$\triangle \mathrm{AB'C'} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ を証明せよ．

（2）　$\triangle \mathrm{ARU} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ を証明せよ．

（3）　$\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{AB'C'}$ を証明せよ．

（4）　4 点 U,R,Q,P が同一円周上にあることを証明せよ．

2. △ABC の 3 頂点から対辺への垂線の足をそれぞれ A',B',C' とする．A' から辺 CA,AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P,Q, B' から辺 AB,BC に下ろした垂線の足をそれぞれ R,S, C' から辺 BC,CA に下ろした垂線の足をそれぞれ T,U とする．また，3 つの垂線の交点である垂心を H とする．前ページで証明したことは証明せずに用いてよい．

（ S 級 7 分，A 級 10 分，B 級 16 分，C 級 25 分 ）

(1) RU // BC を証明せよ．

(2) 4 点 U,R,T,S が同一円周上にあることを証明せよ．

(3) 6 点 P,Q,R,S,T,U が同一円周上にあることを証明せよ．

反射テスト　平面図形　証明　六点円の定理　01　解答解説

1.　△ABC の 3 頂点から対辺への垂線の足をそれぞれ A',B',C' とする．A' から辺 CA,AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P,Q, B' から辺 AB,BC に下ろした垂線の足をそれぞれ R,S, C' から辺 BC,CA に下ろした垂線の足をそれぞれ T,U とする．また, 3 つの垂線の交点である垂心を H とする．　（ S 級 8 分, A 級 12 分, B 級 26 分, C 級 25 分 ）

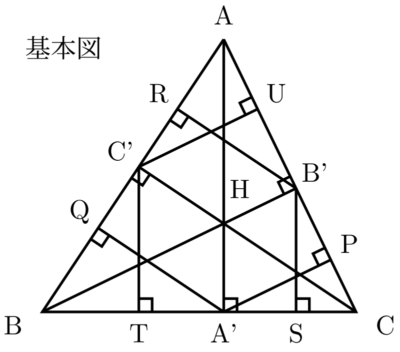
(1)　$\triangle \mathrm{AB'C'} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ を証明せよ．

(2)　$\triangle \mathrm{ARU} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ を証明せよ．

(3)　$\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{AB'C'}$ を証明せよ．

(4)　4 点 U,R,Q,P が同一円周上にあることを証明せよ．

基本図



(1)

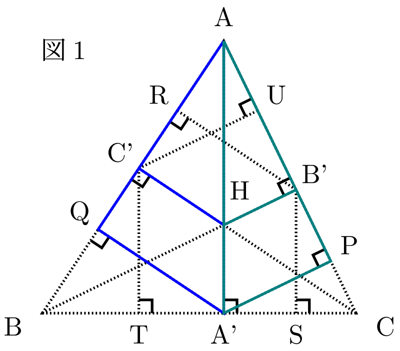
$\angle \mathrm{BB'C} = \angle \mathrm{BC'C}$ より, 4 点 B,C,B',C' は同一円周上にある．

$\triangle \mathrm{AB'C'}$ と $\triangle \mathrm{ABC}$ において,
円に内接する四角形の内角は対角の外角に等しいから,
$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{AB'C'}$
また, 共通であるから, $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{B'AC'}$
2 組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle \mathrm{AB'C'} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$

(2)

$\triangle \mathrm{AB'C'}$ に対して, (1) と同様に考えれば, 対称性から, $\triangle \mathrm{ARU} \backsim \triangle \mathrm{AB'C'}$
これと (1) の結果から, $\triangle \mathrm{ARU} \backsim \triangle \mathrm{AB'C'} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$

図 1



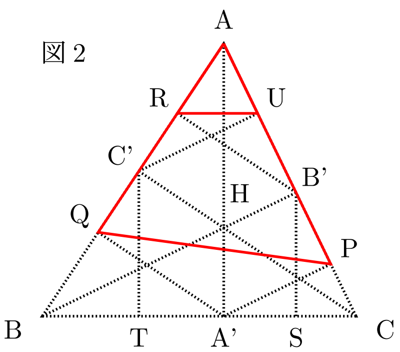
(3)

$\mathrm{C'H} \parallel \mathrm{QA'}$ より, $\mathrm{AC'} : \mathrm{AQ} = \mathrm{AH} : \mathrm{AA'}$ (左図の青線)
$\mathrm{B'H} \parallel \mathrm{PA'}$ より, $\mathrm{AB'} : \mathrm{AP} = \mathrm{AH} : \mathrm{AA'}$ (左図の緑線)
よって, $\mathrm{AC'} : \mathrm{AQ} = \mathrm{AB'} : \mathrm{AP}$

$\triangle \mathrm{APQ}$ と $\triangle \mathrm{AB'C'}$ において,
$\mathrm{AC'} : \mathrm{AQ} = \mathrm{AB'} : \mathrm{AP}$
共通であるから, $\angle \mathrm{PAQ} = \angle \mathrm{B'AC'}$
2 組の辺の比とその間の角が等しいから, $\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{AB'C'}$

(3) 別解
$\angle \mathrm{APA'} = \angle \mathrm{AQA'} = 90^\circ$ より, P,A,Q,A' は同一円周上．かつ, $\triangle \mathrm{AA'Q} \backsim \triangle \mathrm{ABA'}$ より,
$\angle \mathrm{APQ} = \angle \mathrm{AA'Q} = \angle \mathrm{ABA'} = \angle \mathrm{ABC}$ ．よって, 二角相等から相似が示される．

図 2



(4)

(1) から (3) から,
$\triangle \mathrm{ARU} \backsim \triangle \mathrm{APQ}$ (左図の赤線)
対応する角は等しいので, $\angle \mathrm{ARU} = \angle \mathrm{APQ}$
四角形 URQP の内角 P が, 対角 R の外角に等しいから,
4 点 U,R,Q,P は同一円周上にある．

2. △ABC の 3 頂点から対辺への垂線の足をそれぞれ A',B',C' とする．A' から辺 CA,AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P,Q, B' から辺 AB,BC に下ろした垂線の足をそれぞれ R,S, C' から辺 BC,CA に下ろした垂線の足をそれぞれ T,U とする．また, 3 つの垂線の交点である垂心を H とする．前ページで証明したことは証明せずに用いてよい．

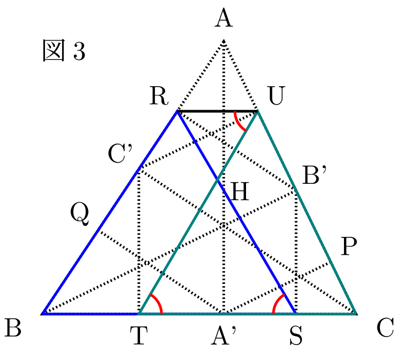
（ S 級 7 分, A 級 10 分, B 級 16 分, C 級 25 分 ）

(1) RU // BC を証明せよ．

(2) 4 点 U,R,T,S が同一円周上にあることを証明せよ．

(3) 6 点 P,Q,R,S,T,U が同一円周上にあることを証明せよ．

図 3



(1)

前ページ 1(1),(2) から, △ARU ∽ △ABC

対応する角は等しいので, ∠ARU = ∠ABC

同位角が等しいので, RU // BC

(2) 前ページ 1(1)〜(3) と対称性から,

△SBR ∽ △ABC (左図の青線)

△TUC ∽ △ABC (左図の緑線)

△ABC の ∠A に対応する角と, 平行線 RU // BC の錯角が等しいことから,

∠TSR = ∠BSR = ∠UTC = ∠TUR (左図の赤い角)

となり, 円周角の定理の逆から, 4 点 U,R,T,S は同一円周上にある．

(3)

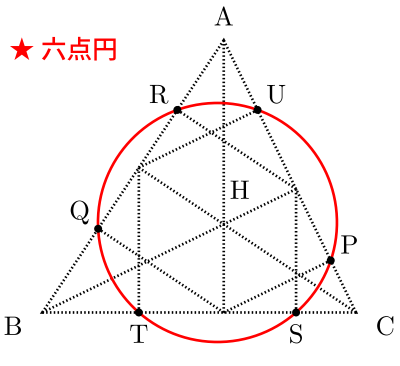
前ページの結果 「 4 点 U,R,Q,P が同一円周上にある．」

対称性から, 「 4 点 Q,T,S,R が同一円周上にある．」 , 「 4 点 S,P,U,T が同一円周上にある．」 が言える．

(2) の結果 「 4 点 U,R,T,S が同一円周上にある．」 と合わせて考えれば,

「 6 点 P,Q,R,S,T,U は同一円周上にある．」 ことが示された．

★ 六点円



★ 六点円の定理

三角形のそれぞれの頂点から下ろした垂線の足から,

他の 2 辺に下ろした合計 6 個の垂線の足は, 同一円周上にある．

この円を **六点円** , もしくは **テイラー円** (英: *Taylor circle*) という．