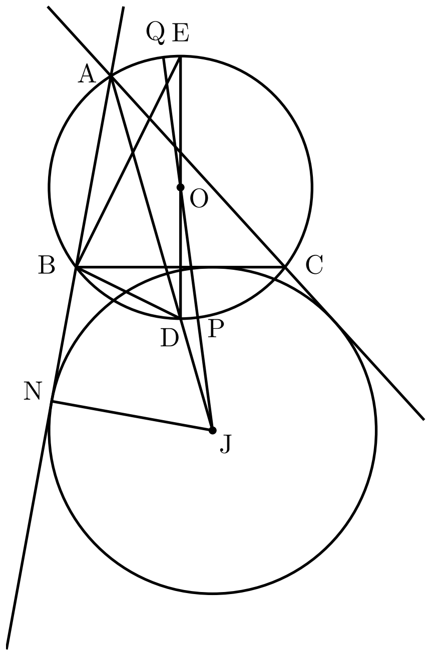
反射テスト　平面図形　証明　傍心と外心の距離　01

1.　△ABC の傍接円と外接円を考える．ただし傍接円は線分 BC に接するものとする．傍心を J , 外心を O , 傍接円の半径を r , 外接円の半径を R とする．直線 AJ と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする．直線 DO と外接円の交点のうち, D ではない方を E とする. また傍心 J から AB に下ろした垂線の足を N とする．また直線 OJ と外接円との交点を下図のように P,Q とする.　（ S 級 6 分, A 級 8 分, B 級 10 分, C 級 12 分 ）



（1）　BD = JD を証明せよ.

（2）　△ANJ ∽ △EBD を証明せよ.

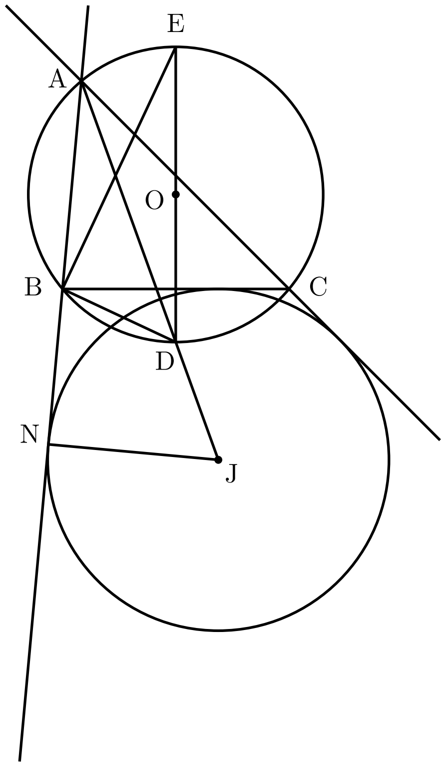
（3）　$2Rr = \mathrm{AJ} \cdot \mathrm{JD}$ を証明せよ.

（4）　$d^2 = R^2 + 2Rr$ を証明せよ.

2. 下図と正弦定理・余弦定理を用いて, $d^2 = R^2 + 2Rr$ を証明する. 前問で証明した $\mathrm{BD} = \mathrm{JD}$ は証明なしに用いてよい.

$\triangle$ABC の外接円 O と線分 BC に接する傍接円 J を考える. 外心を O, 傍心を J , 外接円 O の半径を R, 傍接円 J の半径を r , 外心 O と傍心 J との距離を d とする. AE と外接円 O の交点のうち A ではないものを D とする.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分)



(1) $\triangle$AJN から, AJ を r と $\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ を用いて表せ.

(2) $\triangle$EBD に正弦定理を適用し, BD を R と $\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ を用いて表せ.

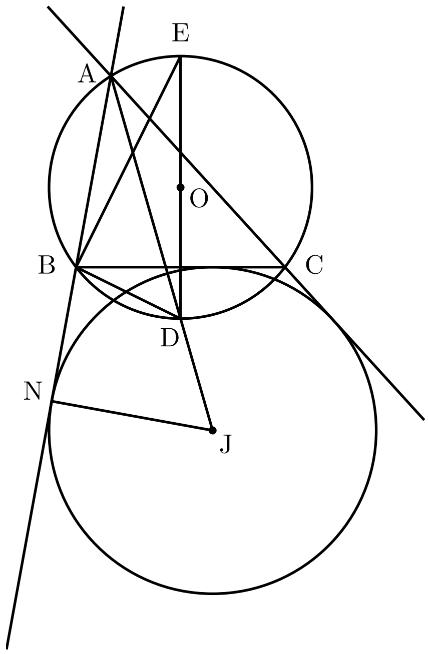
(3) $\triangle$OAD から, AD を R と $\cos\angle\mathrm{OAD}$ を用いて表せ.

(4) $\triangle$OAJ に余弦定理を適用し, d^2 を R , AJ , $\cos\angle\mathrm{OAJ}$ を用いて表せ.

(5) 以上の結果から, $d^2 = R^2 + 2Rr$ を導け.

反射テスト　平面図形　証明　傍心と外心の距離　01　解答解説

1.　△ABC の傍接円と外接円を考える．ただし傍接円は線分 BC に接するものとする．傍心を J，外心を O，傍接円の半径を r，外接円の半径を R とする．直線 AJ と外接円の交点のうち，A ではない方を D とする．直線 DO と外接円の交点のうち，D ではない方を E とする．また傍心 J から AB に下ろした垂線の足を N とする．また直線 OJ と外接円との交点を下図のように P,Q とする．（ S 級 6 分，A 級 8 分，B 級 10 分，C 級 12 分 ）



（1）　BD = JD を証明せよ．

（2）　△ANJ ∽ △EBD を証明せよ．

（3）　$2Rr = \mathrm{AJ} \cdot \mathrm{JD}$ を証明せよ．

（4）　$d^2 = R^2 + 2Rr$ を証明せよ．

解答解説

(1)　△DJB において，

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{DJB} &= \angle\mathrm{JBN} - \angle\mathrm{JAB} && \because\ \angle\mathrm{JBN}\text{ は }\triangle\mathrm{JAB}\text{ の外角.}\\
&= \angle\mathrm{JBC} - \angle\mathrm{DAC} && \because\ \text{傍心は内角 A, 外角 B の二等分線上.}\\
&= \angle\mathrm{JBC} - \angle\mathrm{DBC} && \because\ \text{外接円の}\overset{\frown}{\mathrm{DC}}\text{の円周角は等しい.}\\
&= \angle\mathrm{DBJ}
\end{aligned}$$

以上から，△DJB は二等辺三角形．ゆえに，BD = JD．

(2)

△ANJ　と　△EBD　において，

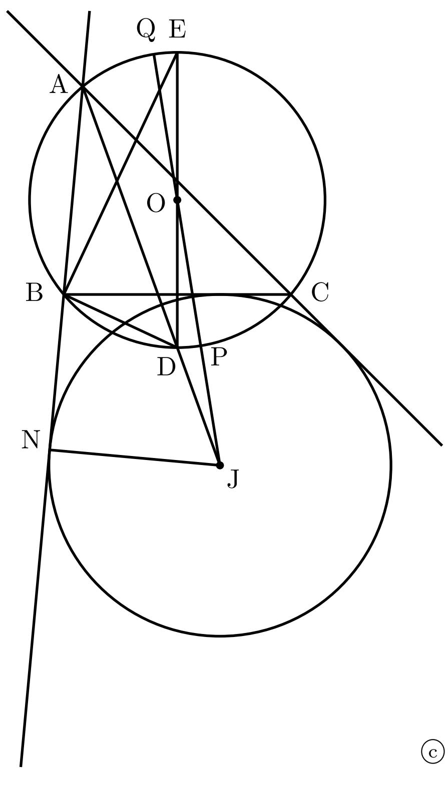
$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{JAN} &= \angle\mathrm{DEB} && \because\ \text{外接円の}\overset{\frown}{\mathrm{BD}}\text{の円周角は等しい.}\\
\angle\mathrm{ANJ} &= \angle\mathrm{EBD} && \because\ \text{N は傍接円の接点, DE は直径なので, ともに } 90^\circ.\\
\triangle\mathrm{ANJ} &\backsim \triangle\mathrm{EBD} && \because\ \text{二角相等}
\end{aligned}$$

(3)

(2) から，AJ : NJ = ED : BD　⇔　NJ · ED = AJ · BD

NJ = r，ED = $2R$ であるから，$2Rr = \mathrm{AJ} \cdot \mathrm{BD}$

(1) から，BD = JD であるから，$2Rr = \mathrm{AJ} \cdot \mathrm{JD}$



(4)　方べきの定理より，JD · JA = JP · JQ

これを (3) の等式に代入して，

$$\begin{aligned}
2Rr &= \mathrm{AJ} \cdot \mathrm{JD}\\
&= \mathrm{JP} \cdot \mathrm{JQ}\\
&= (\mathrm{OJ} - \mathrm{OP}) \cdot (\mathrm{OJ} + \mathrm{OQ})\\
&= (d - R) \cdot (d + R)\\
&= d^2 - R^2
\end{aligned}$$

ゆえに，$d^2 = R^2 + 2Rr$．

☆別解 (4) O から AJ に垂線 OH を下ろして，三平方の定理を用いてもよい．

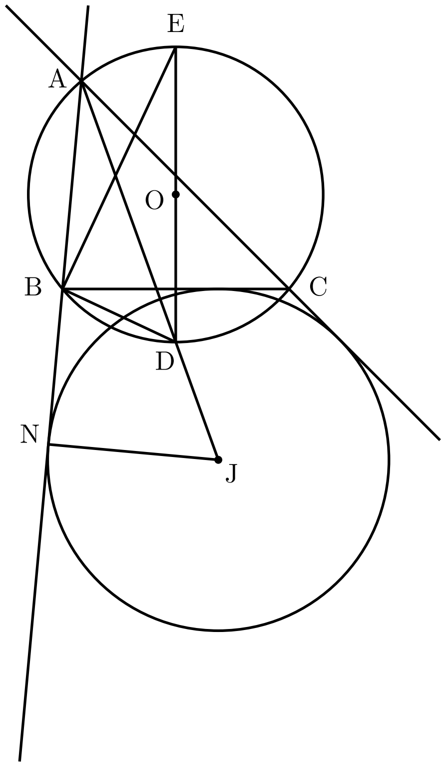
$$\mathrm{OH}^2 = R^2 - \left(\frac{\mathrm{AD}}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{\mathrm{AD}}{2} + \mathrm{DJ}\right)^2$$

より，$R^2 = d^2 - \mathrm{DJ} \cdot \mathrm{AJ}$ が求められる．

2. 下図と正弦定理・余弦定理を用いて, $d^2 = R^2 + 2Rr$ を証明する. 前問で証明した BD $=$ JD は証明なしに用いてよい.

△ABC の外接円 O と線分 BC に接する傍接円 J を考える. 外心を O, 傍心を J , 外接円 O の半径を R, 傍接円 J の半径を r , 外心 O と傍心 J との距離を d とする. AE と外接円 O の交点のうち A ではないものを D とする.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分)



(1) △AJN から, AJ を r と $\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ を用いて表せ.

(2) △EBD に正弦定理を適用し, BD を R と $\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ を用いて表せ.

(3) △OAD から, AD を R と $\cos\angle\mathrm{OAD}$ を用いて表せ.

(4) △OAJ に余弦定理を適用し, d^2 を R , AJ , $\cos\angle\mathrm{OAJ}$ を用いて表せ.

(5) 以上の結果から, $d^2 = R^2 + 2Rr$ を導け.

解答解説

(1) △AJN は直角三角形であるから,

$$\mathrm{JN} = \mathrm{AJ}\sin\frac{\mathrm{A}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\mathrm{AJ} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}}\ .$$

(2) △EBD に正弦定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}} = 2R \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\mathrm{BD} = 2R\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}\ .$$

(3) △OAD は二等辺三角形であるから,

$$\mathrm{AD} = 2\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{OAD}\ .$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{AD} = 2R\cos\angle\mathrm{OAD}\ .$$

(4) △OAJ に余弦定理を適用して,

$$\mathrm{OJ}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AJ}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AJ}\cos\angle\mathrm{OAJ}$$
$$\Leftrightarrow \quad d^2 = R^2 + \mathrm{AJ}^2 - 2R\cdot\mathrm{AJ}\cos\angle\mathrm{OAJ}\ .$$

(5)

(3) から, $\cos\angle\mathrm{OAJ} = \cos\angle\mathrm{OAD} = \dfrac{\mathrm{AD}}{2R}$.

以上の結果から,

$$\begin{aligned}
d^2 &= R^2 + \mathrm{AJ}^2 - 2R\cdot\mathrm{AJ}\cos\angle\mathrm{OAJ} \\
&= R^2 + \mathrm{AJ}^2 - 2R\cdot\mathrm{AJ}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{2R} \\
&= R^2 + \mathrm{AJ}\,(\mathrm{AJ} - \mathrm{AD}) \\
&= R^2 + \mathrm{AJ}\cdot\mathrm{JD} \\
&= R^2 + \mathrm{AJ}\cdot\mathrm{BD} \\
&= R^2 + \frac{r}{\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}\cdot 2R\sin\frac{\mathrm{A}}{2} \\
&= R^2 + 2Rr
\end{aligned}$$

★ オイラーの定理 オイラーの定理の幾何的証明 参照.

$\boldsymbol{d^2 = R^2 - 2Rr}$ (内接円の半径を $\boldsymbol{r}$, 三角形の外接円の半径を $\boldsymbol{R}$, 内心と外心の距離を $\boldsymbol{d}$) .

オイラーの定理の傍心版が, この反射テストのテーマ.