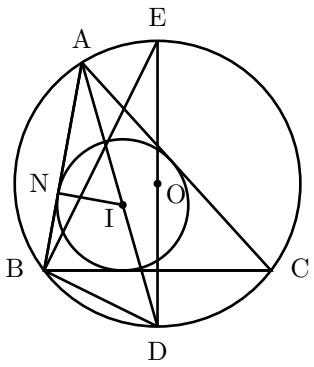
反射テスト　平面図形　証明　内心と外心との距離　01

1.　△ABC の内接円と外接円を考える. 内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする. 直線 DO と外接円の交点のうち, D ではない方を E とする. また内心 I から AB に下ろした垂線の足を N とする.　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分 ）



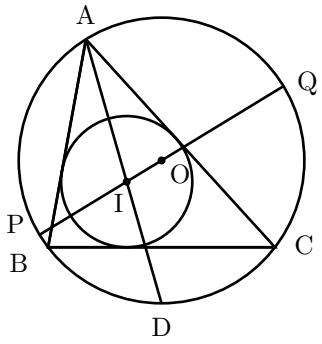
（1）　BD = ID を証明せよ.

（2）　△ANI ∽ △EBD を証明せよ.

（3）　$2Rr = \mathrm{AI} \cdot \mathrm{ID}$ を証明せよ.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. △ABC の内接円と外接円を考える．内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R , 内心 I と外心 O の距離を d とする．直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする．また直線 OI と外接円との交点を下図のように P,Q とする．前ページで証明したことは, 証明なしに使ってよい．　（ S 級 2 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分 30 秒, C 級 10 分 ）



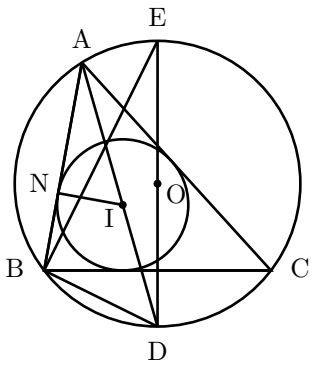
（1）　$2Rr = R^2 - d^2$ を証明せよ．

（2）　$R \geqq 2r$ を証明せよ．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　平面図形　証明　内心と外心との距離　01　解答解説

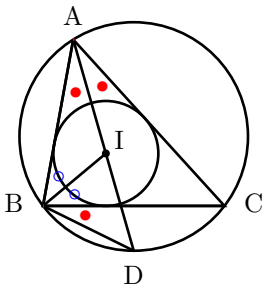
1.　△ABC の内接円と外接円を考える．内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする．直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする．直線 DO と外接円の交点のうち, D ではない方を E とする．また内心 I から AB に下ろした垂線の足を N とする．　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分 ）



(1)　BD = ID を証明せよ．

(2)　△ANI ∽ △EBD を証明せよ．

(3)　$2Rr$ = AI · ID を証明せよ．



(1)　△DIB において, (左図参照)

∠DIB = ∠IAB + ∠ABI　∵ ∠DIB は △IAB の外角.

= ∠DAC + ∠CBI　∵ 内心 I は三角形の内角の二等分線上.

= ∠DBC + ∠CBI　∵ $\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$の円周角は等しい.

= ∠DBI

以上から, △DIB は二等辺三角形．ゆえに, BD = ID .

(2)

△ANI と △EBD において,

∠IAN = ∠DEB　∵ $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$の円周角は等しい.

∠ANI = ∠EBD　∵ N は内接円の接点, DE は直径なので, ともに 90°.

△ANI ∽ △EBD　∵ 二角相等

(3)

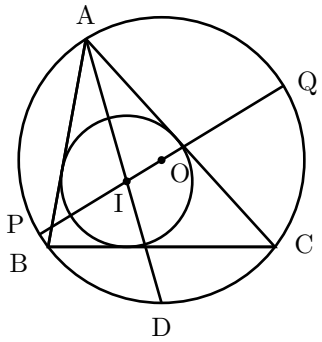
(2) から, AI : NI = ED : BD　⇔　NI · ED = AI · BD

NI = r , ED = $2R$ であるから, $2Rr$ = AI · BD

(1) から, BD = ID であるから, $2Rr$ = AI · ID

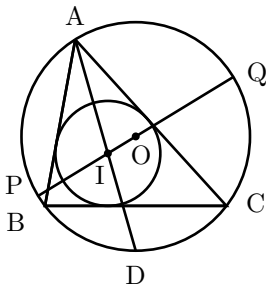
ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. △ABC の内接円と外接円を考える．内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R , 内心 I と外心 O の距離を d とする．直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする．また直線 OI と外接円との交点を下図のように P,Q とする．前ページで証明したことは, 証明なしに使ってよい．　（ S 級 2 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分 30 秒, C 級 10 分 ）



(1)　$2Rr = R^2 - d^2$ を証明せよ．

(2)　$R \geqq 2r$ を証明せよ．



(1)　方べきの定理より, AI · ID = IP · IQ
これを 1(3) の等式に代入して,

$$\begin{aligned} 2Rr &= \mathrm{AI} \cdot \mathrm{ID} \\ &= \mathrm{IP} \cdot \mathrm{IQ} \\ &= (\mathrm{OP} - \mathrm{OI}) \cdot (\mathrm{OP} + \mathrm{OI}) \\ &= (R-d) \cdot (R+d) \\ &= R^2 - d^2 \end{aligned}$$

(2)
2(1) の等式を変形して,

$$\begin{aligned} 2Rr &= R^2 - d^2 \\ \Leftrightarrow\ R^2 - 2Rr &= d^2 \end{aligned}$$

$d^2 \geqq 0$ かつ $R > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} R^2 - 2Rr &\geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ R(R-2r) &\geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ R - 2r &\geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ R &\geqq 2r \end{aligned}$$

等号条件は, $d = 0$ のとき．つまり, 内心と外心が一致するときになるので, △ABC が正三角形のときである．

★ オイラーの定理　(*Euler's theorem*)　「$\boldsymbol{R(R-2r) = d^2}$」
レオンハルト・オイラーは, 1765 年にこの関係について述べているが、*William Chapple* は同じ関係式を 1745 年に発表している．このため, この定理は, Chapple の定理, Chapple-オイラーの定理などとも呼ばれる．

★ オイラーの不等式　(*Euler's inequality*)　「$\boldsymbol{R \geqq 2r}$」
・ 三角比を用いた証明もある．こちら を参照.
・ 他の証明　外接円・内接円の公式から 相加相乗平均の関係 を用いて証明する．
三角形の 3 辺 a, b, c に対して, $s = \frac{a+b+c}{2}$ とする．$R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$ から,
$R - 2r = \frac{abcs - 8S^2}{4Ss}$
ヘロンの公式と相加相乗平均の関係から,

$$\begin{aligned} 8S^2 &= 8s(s-a)(s-b)(s-c) = s \cdot 2\sqrt{(s-a)(s-b)} \cdot 2\sqrt{(s-b)(s-c)} \cdot 2\sqrt{(s-c)(s-a)} \\ &\leqq s\{(s-a)+(s-b)+(s-b)+(s-c)+(s-c)+(s-a)\} = abcs \end{aligned}$$

よって, $R - 2r \geqq 0$ は示される．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）