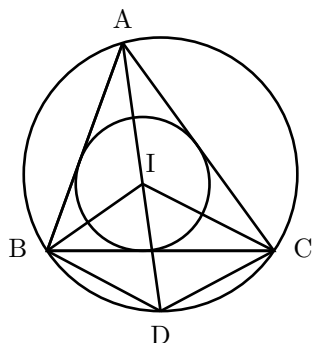


1. $\triangle ABC$ の内心 I と外接円 O を考える. 直線 AI と外接円 O の交点を D とするとき, $DI = DB = DC$ を証明せよ.
(S 級 4 分 30 秒, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分)

2. $\triangle ABC$ の傍心 J と外接円 O を考える. ただし傍心 I は直線 BC に接する傍接円の中心とする. 直線 AJ と外接円 O の交点を D とするとき, $DJ = DB = DC$ を証明せよ.
(S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 12 分, C 級 18 分)

1. $\triangle ABC$ の内心 I と外接円 O を考える. 直線 AI と外接円 O の交点を D とするとき, $DI = DB = DC$ を証明せよ.
(S 級 4 分 30 秒, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分)



$\triangle DIB$ において,

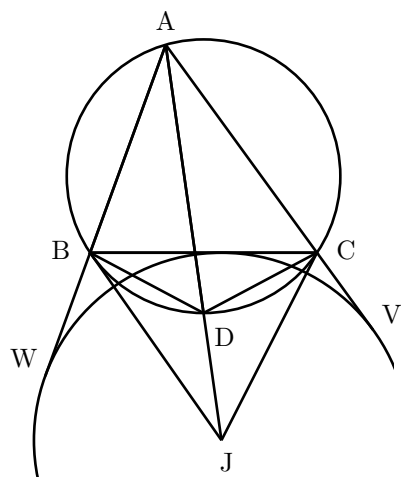
$$\begin{aligned}\angle DIB &= \angle IBA + \angle IAB \quad (\angle DIB \text{ は } \triangle ABI \text{ の外角.}) \\ &= \angle IBC + \angle IAC \quad (\text{内心 } I \text{ は } \triangle ABC \text{ の内角の二等分線上にある.}) \\ &= \angle IBC + \angle DBC \quad (\widehat{DC} \text{ の円周角は等しい.}) \\ &= \angle DBI\end{aligned}$$

よって, $\triangle DIB$ は二等辺三角形であるから, 底辺は等しく, $DI = DB$.

$\triangle DIC$ において, も同様にして, $DI = DC$.

以上から, $DI = DB = DC$.

2. $\triangle ABC$ の傍心 J と外接円 O を考える. ただし傍心 I は直線 BC に接する傍接円の中心とする. 直線 AJ と外接円 O の交点を D とするとき, $DJ = DB = DC$ を証明せよ.
(S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 12 分, C 級 18 分)



$\triangle DJB$ において,

$$\begin{aligned}\angle DJB &= \angle JBW - \angle JAB \quad (\angle JBW \text{ は } \triangle ABJ \text{ の外角.}) \\ &= \angle JBC - \angle JAC \quad (\text{傍心 } J \text{ は } \triangle ABC \text{ の内角・外角の二等分線上.}) \\ &= \angle JBC - \angle DBC \quad (\widehat{DC} \text{ の円周角は等しい.}) \\ &= \angle DBJ\end{aligned}$$

よって, $\triangle DJB$ は二等辺三角形であるから, 底辺は等しく, $DJ = DB$.

$\triangle DJC$ において, も同様にして, $DJ = DC$.

以上から, $DJ = DB = DC$.

★トリリウム定理 (*Trillium theorem*)

「内心と傍心の midpoint は $\triangle ABC$ の外接円の周上にある。」

前ページとこのページの結果からトリリウム定理が証明できる.

前ページの内心 I と, このページの傍心 J はどちらも $\triangle ABC$ の内角 A の二等分線上にあるから, 外接円との交点 D は一致する. ゆえに, $DI = DJ = DB = DC$.

内心 I , 傍心 J , 三角形の頂点 B, C は, D を中心とする同一円周上にある.