

反射テスト 曲線 媒介変数表示と曲線 02 楕円

1. 次の式で表される点 $P(x, y)$ の曲線の方程式を求め, 図示せよ. (S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$x = \frac{2}{1+t^2}, y = \frac{t}{1+t^2}$$

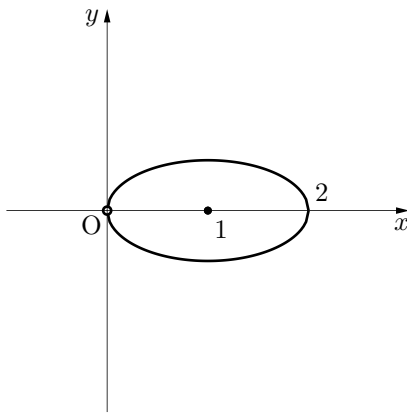
2. 次の式で表される点 $P(x, y)$ の曲線の方程式を求め, 図示せよ. (S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, y = \frac{t^2}{1+t^2}$$

反射テスト 曲線 媒介変数表示と曲線 02 楕円 解答解説

1. 次の式で表される点 $P(x, y)$ の曲線の方程式を求め、図示せよ。(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$x = \frac{2}{1+t^2}, y = \frac{t}{1+t^2}$$



式をみると, y が x の $\frac{t}{2}$ 倍であるから, $y = \frac{t}{2}x$

$x = \frac{2}{1+t^2}$ から, $x \neq 0$ であるので, $t = \frac{2y}{x}$

これを $x = \frac{2}{1+t^2}$ に代入して,

$$x = \frac{2}{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x \left(1 + \frac{4y^2}{x^2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{4y^2}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$x \neq 0$ であるから, この楕円上の $(1, 0)$ をとることはできない.

楕円 $(x-1)^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ ただし, $(0, 0)$ を除く. .

☆変域に注意

$x = \frac{2}{1+t^2}$ より, $x > 0$ であることに注目.

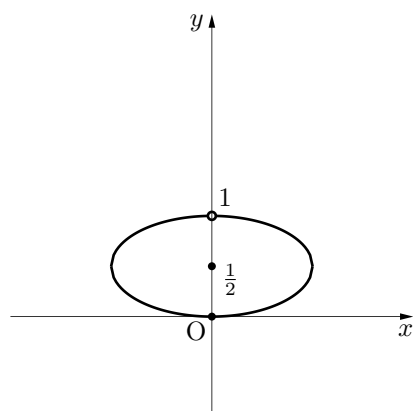
$t \rightarrow -\infty$ のとき, $x = \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow +0$, $y = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow -0$ ← 上図の楕円上で, 原点に下から近づく.

$t \rightarrow \infty$ のとき, $x = \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow +0$, $y = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow +0$ ← 上図の楕円上で, 原点に上から近づく.

つまり, 実数範囲では, $(0, 0)$ はとれない.

2. 次の式で表される点 $P(x, y)$ の曲線の方程式を求め、図示せよ。(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, y = \frac{t^2}{1+t^2}$$



式をみると, y が x の $\frac{t}{2}$ 倍であるから, $y = \frac{t}{2}x$

$x = 0$ のとき, $t = 0$ であるから, $(x, y) = (0, 0)$

$x \neq 0$ のとき, $t = \frac{2y}{x}$

これを $x = \frac{2t}{1+t^2}$ に代入して,

$$x = \frac{2 \cdot \frac{2y}{x}}{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x \left(1 + \frac{4y^2}{x^2}\right) = \frac{4y}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2y - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$t \neq 0 \text{ のとき, } y = \frac{1}{\frac{1}{t^2} + 1} < 1.$$

なぜならば, この分母は 1 より大きい. よって, P が $(0, 1)$ をとることはない.

$$\text{楕円 } x^2 + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{ただし, } (0, 1) \text{ を除く.}$$

☆変域に注意

$$t \rightarrow -\infty \text{ のとき, } x = \frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow -0, \quad y = \frac{1}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow 1 - 0 \quad \leftarrow \text{上図の楕円上で, 点 } (0, 1) \text{ に左下から近づく.}$$

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } x = \frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow +0, \quad y = \frac{1}{\frac{1}{t^2} + 1} \rightarrow 1 - 0 \quad \leftarrow \text{上図の楕円上で, 点 } (0, 1) \text{ に右下から近づく.}$$

つまり, 実数範囲では, $(0, 1)$ はとれない.