

反射テスト 曲線 媒介変数表示と曲線 01

1. 次の式で表される点 $P(x, y)$ は, どのような曲線を描くか. 形と方程式を言え. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = 2 \cos \theta + 1 \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = 2^t + 2^{-t} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$$

2. 次の式で表される点 $P(x, y)$ は, どのような曲線を描くか. 形と方程式を言え. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} x = t - 2 \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = \cos \theta - 3 \\ y = \sin \theta + 4 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = \cos \theta + 2 \\ y = 4 \sin \theta - 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = 2^{t+1} + 2^{-t+1} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$$

反射テスト 曲線 媒介変数表示と曲線 01 解答解説

1. 次の式で表される点 $P(x, y)$ は、どのような曲線を描くか. 形と方程式を言え. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ 曲線の媒介変数表示

媒介変数 t によって, $x = f(t)$, $y = g(t)$ が与えられているとき, t を消去すれば, x, y による曲線の方程式が得られる.
 x, y の変域に注意すること.

$$(1) \quad \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$$

x の変域が $x = \sqrt{t}$ より, $x \geq 0$.

t を消去して, $y = x^2$

放物線 $y = x^2$ ($x \geq 0$).

$$(2) \quad \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$$

$\cos \theta = x$, $\sin \theta = y - 1$ から,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$\text{円 } x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = 2 \cos \theta + 1 \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$$

$\cos \theta = \frac{x-1}{2}$, $\sin \theta = \frac{y}{3}$ から,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\text{楕円 } \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = 2^t + 2^{-t} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$$

$$x^2 = 2^{2t} + 2 + 2^{-2t}$$

$$y^2 = 2^{2t} - 2 + 2^{-2t}$$

差が定数になるから,

$$x^2 - y^2 = 4$$

実数 t に対して, 2^t , 2^{-t} は正である.

よって, 相加平均・相乗平均の関係から,

$$x = 2^t + 2^{-t} \geq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{-t}} = 2$$

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (x \geq 2).$$

☆定義域に注意.

2. 次の式で表される点 $P(x, y)$ は、どのような曲線を描くか. 形と方程式を言え. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

$$(1) \quad \begin{cases} x = t - 2 \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

y の変域が $y = \sqrt{t}$ より, $y \geq 0$.

t を消去して, $x + 2 = y^2$

放物線 $x = y^2 - 2$ ($y \geq 0$).

$$(2) \quad \begin{cases} x = \cos \theta - 3 \\ y = \sin \theta + 4 \end{cases}$$

$\cos \theta = x + 3$, $\sin \theta = y - 4$ から,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

円 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$.

$$(3) \quad \begin{cases} x = \cos \theta + 2 \\ y = 4 \sin \theta - 1 \end{cases}$$

$\cos \theta = \frac{x-2}{1}$, $\sin \theta = \frac{y+1}{4}$ から,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{1}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{4}\right)^2 = 1$$

楕円 $(x - 2)^2 + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$.

$$(4) \quad \begin{cases} x = 2^{t+1} + 2^{-t+1} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$$

$$x = 2 \cdot 2^{2t} + 2 \cdot 2^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2^t + 2^{-t}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2} = \cdot 2^{2t} + 2 + \cdot 2^{-2t}$$

$$y^2 = 2^{2t} - 2 + 2^{-2t}$$

差が定数になるから,

$$\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 4$$

実数 t に対して, 2^t , 2^{-t} は正である.

よって, 相加平均・相乗平均の関係から,

$$\frac{x}{2} = 2^t + 2^{-t} \geq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{-t}} = 2$$

双曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ ($x \geq 4$).

☆定義域に注意.