

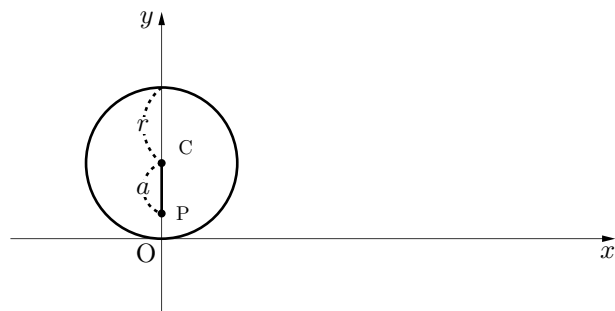
反射テスト 曲線 媒介変数 トロコイド 01

1. 円がすべらず転がるとき, その円内の点がどんな軌跡をとるか考える.

下図において, 半径 r の円 C が, x 軸の正の方向へ, x 軸にそって, すべらず転がる. 最初, 円は原点に接するようにおき, 円内にあって原点と円の中心を結ぶ線分上に点 P をおく. 線分 CP は円に固定されているものとする. $CP = a$ として, 問に答えよ. ただし, $a < r$ である.

(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

- (1) 円が θ 回転したとき, 円の中心 C の座標を θ で表せ.
- (2) 円が θ 回転したとき, 点 P の x 座標を θ で表せ.
- (3) 円が θ 回転したとき, 点 P の y 座標を θ で表せ.

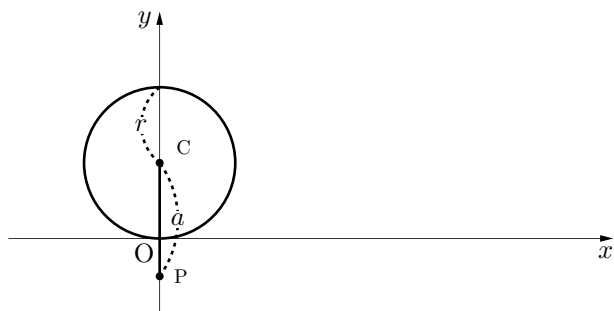


2. 円がすべらず転がる時、その円外の点がどんな軌跡をとるか考える。

下図において、半径 r の円 C が、 x 軸の正の方向へ、 x 軸にそって、すべらず転がる。最初、円は原点に接するようにおく。原点と円の中心 C を結ぶ直線上にあって、円外の点 P を考える。線分 CP は円に固定されているものとする。 $CP = a$ として、問に答えよ。ただし、 $a > r$ である。

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

- (1) 円が θ 回転したとき、円の中心 C の座標を θ で表せ。
- (2) 円が θ 回転したとき、点 P の x 座標を θ で表せ。
- (3) 円が θ 回転したとき、点 P の y 座標を θ で表せ。



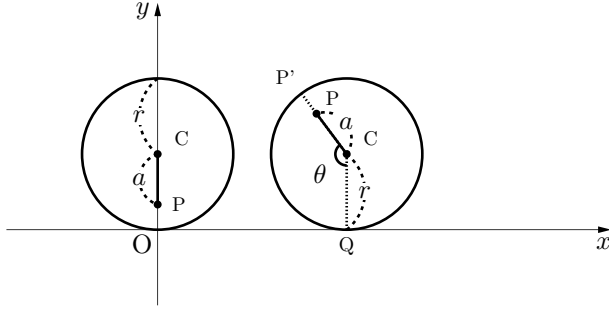
反射テスト 曲線 媒介変数 トロコイド 01 解答解説

1. 円がすべらず転がるとき、その円内の点がどんな軌跡をとるか考える。

下図において、半径 r の円 C が、 x 軸の正の方向へ、 x 軸にそって、すべらず転がる。最初、円は原点に接するようにおき、円内にあって原点と円の中心を結ぶ線分上に点 P をおく。線分 CP は円に固定されているものとする。 $CP = a$ として、問に答えよ。ただし、 $a < r$ である。

(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

- (1) 円が θ 回転したとき、円の中心 C の座標を θ で表せ。
- (2) 円が θ 回転したとき、点 P の x 座標を θ で表せ。
- (3) 円が θ 回転したとき、点 P の y 座標を θ で表せ。



- (1) θ 回転したときの円 C と x 軸との接点を Q とする。

すべらず回転したから、 $\widehat{P'Q}$ の長さと OQ の長さが等しい。

$$OQ = \widehat{P'Q} = r \cdot \theta = r\theta$$

よって、 C の座標は、 $C(r\theta, r)$

- (2) 左図から、 P の x 座標と C の x 座標の差が、 $a \sin \theta$ である。

$$x = r\theta - a \sin \theta$$

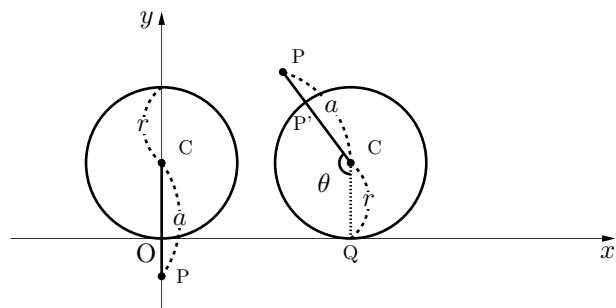
- (3) 左図から、 P の y 座標と C の y 座標の差が、 $a \cos \theta$ である。

$$y = r - a \cos \theta$$

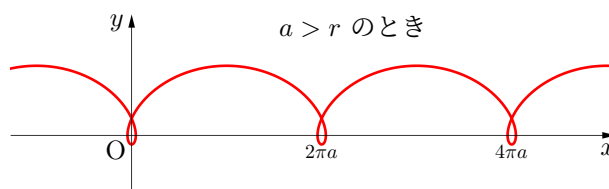
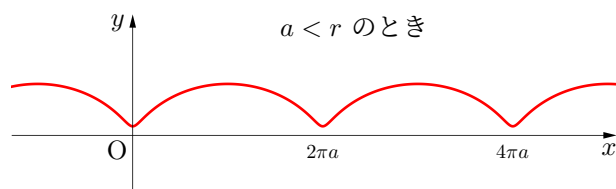
2. 円がすべらず転がるとき、その円外の点がどんな軌跡をとるか考える。

下図において、半径 r の円 C が、 x 軸の正の方向へ、 x 軸にそって、すべらず転がる。最初、円は原点に接するようにおく。原点と円の中心 C を結ぶ直線上にあって、円外の点 P を考える。線分 CP は円に固定されているものとする。 $CP = a$ として、問に答えよ。ただし、 $a > r$ である。 (S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

- (1) 円が θ 回転したとき、円の中心 C の座標を θ で表せ。
- (2) 円が θ 回転したとき、点 P の x 座標を θ で表せ。
- (3) 円が θ 回転したとき、点 P の y 座標を θ で表せ。



- (1) θ 回転したときの円 C と x 軸との接点を Q とする。
すべらず回転したから、 $\widehat{P'Q}$ の長さと OQ の長さが等しい。
 $OQ = \widehat{P'Q} = r \cdot \theta = r\theta$
よって、 C の座標は、 $C(r\theta, r)$
- (2) 左図から、 P の x 座標と C の x 座標の差が、 $a \sin \theta$ である。
 $x = r\theta - a \sin \theta$
- (3) 左図から、 P の y 座標と C の y 座標の差が、 $a \cos \theta$ である。
 $y = r - a \cos \theta$



★ トロコイド (英語: trochoid)

円 C (半径 r) が x 軸に接しながら、すべらず転がるとき、円内の定点 P の軌跡を **トロコイド** (上図赤線) という。

$CP = a$ のとき、

$$\text{点 } P \text{ の軌跡の方程式 } \begin{cases} x = r\theta - a \sin \theta \\ y = r - a \cos \theta \end{cases}$$

$a = r$ のとき、この曲線は サイクロイド となる。