

反射テスト 曲線 双曲線 接線 01

1. 点 A を通る双曲線の接線の方程式を求めよ. (S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

(1)
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{点 A} & (1, 6) \\ \text{双曲線の方程式} & x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \end{array} \right.$$

(2)
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{点 A} & (2, 2) \\ \text{双曲線の方程式} & x^2 - y^2 = 1 \end{array} \right.$$

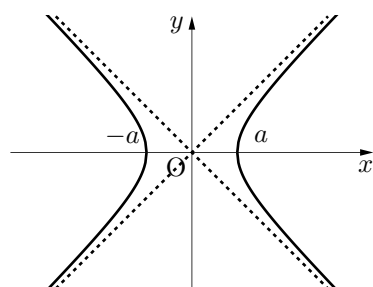
2. 点 A を通る双曲線の接線の方程式を求めよ. (S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{点 A} & (3, 9) \\ \text{双曲線の方程式} & x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{点 A} & \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ \text{双曲線の方程式} & \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{array} \right.$$

反射テスト 曲線 双曲線 接線 01 解答解説

1. 点 A を通る双曲線の接線の方程式を求めよ。(S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

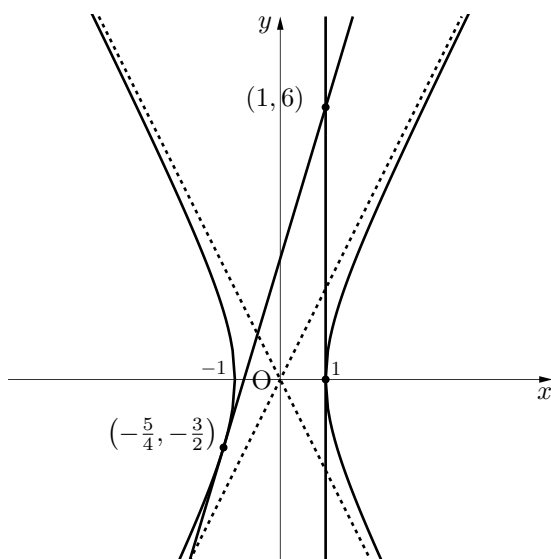


★ 双曲線の接線の方程式

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b は正) において,
接点 (x_1, y_1) を通る接線の方程式は,
$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

となる.

(1) $\begin{cases} \text{点 A} & (1, 6) \\ \text{双曲線の方程式} & x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{1} - \frac{y_1 y}{4} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(1, 6) を通るから, これを代入して,

$$\frac{1x_1}{1} - \frac{6y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2}y_1 + 1$$

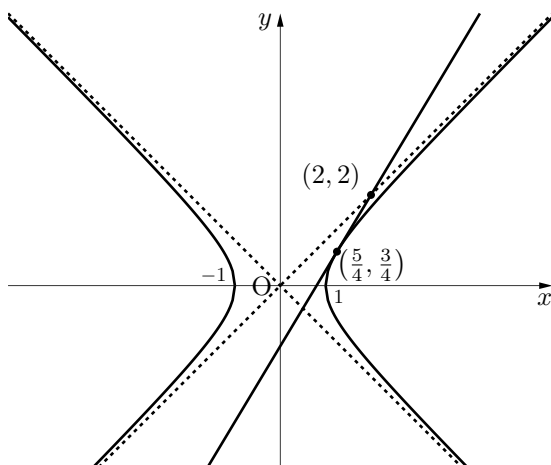
接点は双曲線上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{1^2} - \frac{(y_1)^2}{2^2} = 1$

$x_1 = \frac{3}{2}y_1 + 1$ を代入して, y_1 について解けば,
 $y_1 = -\frac{3}{2}, 0$

それぞれについて x_1 についても解いて, $(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}), (1, 0)$.
上図のように接線が描ける.

$$\text{接線の方程式は, } \begin{cases} \frac{-\frac{5}{4}x}{1} - \frac{-\frac{3}{2}y}{4} = 1 & \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x + \frac{3}{8}y = 1 \\ \frac{1x}{1} - \frac{0y}{4} = 1 & \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} \text{点 A} & (2, 2) \\ \text{双曲線の方程式} & x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{1} - \frac{y_1 y}{1} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(2, 2) を通るから, これを代入して,

$$\frac{2x_1}{1} - \frac{2y_1}{1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = y_1 + \frac{1}{2}$$

接点は双曲線上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{1^2} - \frac{(y_1)^2}{1^2} = 1$

$x_1 = y_1 + \frac{1}{2}$ を代入して, y_1 について解けば,
 $y_1 = \frac{3}{4}$

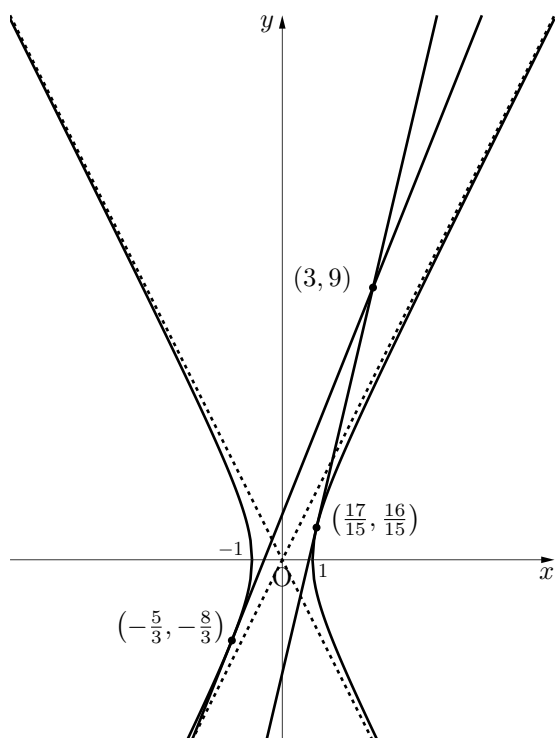
それぞれについて x_1 についても解いて, $(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$.
上図のように接線が描ける.

$$\text{接線の方程式は, } \frac{\frac{5}{4}x}{1} - \frac{\frac{3}{4}y}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y = 1$$

☆点 A が漸近線上にある場合 (原点を除く), 最後 1 次方程式になり, 接線が 1 本のみになる. また, 原点からは接線が引けない.

2. 点 A を通る双曲線の接線の方程式を求めよ。(S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分)

(1)
$$\begin{cases} \text{点 A} & (3, 9) \\ \text{双曲線の方程式} & x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{1} - \frac{y_1 y}{4} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(3, 9) を通るから, これを代入して,

$$\frac{3x_1}{1} - \frac{9y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{3}$$

接点は双曲線上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{1^2} - \frac{(y_1)^2}{2^2} = 1$

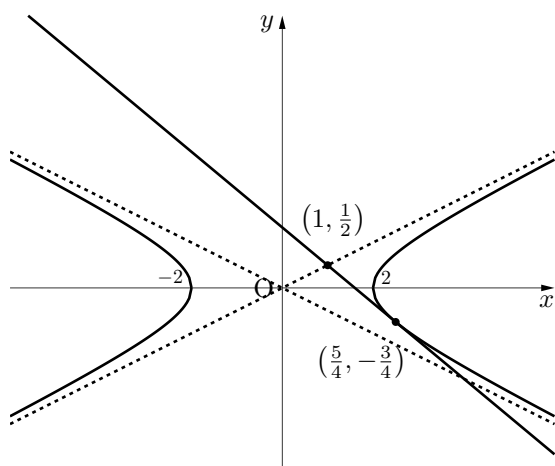
$x_1 = \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{3}$ を代入して, y_1 について解けば,

$$y_1 = -\frac{8}{3}, \frac{16}{15}$$

それぞれについて x_1 についても解いて, $(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}), (\frac{17}{15}, \frac{16}{15})$.
上図のように接線が描ける.

接線の方程式は,
$$\begin{cases} \frac{-\frac{5}{3}x}{1} - \frac{-\frac{8}{3}y}{4} = 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y = 1 \\ \frac{\frac{17}{15}x}{1} - \frac{\frac{16}{15}y}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{15}x - \frac{4}{15}y = 1 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \text{点 A} & (1, \frac{1}{2}) \\ \text{双曲線の方程式} & \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases}$$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{4} - \frac{y_1 y}{1} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(1, $\frac{1}{2}$) を通るから, これを代入して,

$$\frac{1x_1}{4} - \frac{\frac{1}{2}y_1}{1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 2y_1 + 4$$

接点は双曲線上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{2^2} - \frac{(y_1)^2}{1^2} = 1$

$x_1 = 2y_1 + 4$ を代入して, y_1 について解けば,

$$y_1 = -\frac{3}{4}$$

それぞれについて x_1 についても解いて, $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$.
上図のように接線が描ける.

接線の方程式は,
$$\frac{\frac{5}{2}x}{4} - \frac{-\frac{3}{4}y}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{8}x + \frac{3}{4}y = 1$$

☆点 A が漸近線上にある場合 (原点を除く), 最後 1 次方程式になり, 接線が 1 本のみになる. また, 原点からは接線が引けない.