

反射テスト 曲線 楕円 接線 01

1. 点 A を通る楕円の接線の方程式を求めよ。(S 級 3 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{点 A} \quad (6, 0) \\ \text{楕円の方程式} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{点 A} \quad (6, 4) \\ \text{楕円の方程式} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \end{array} \right.$$

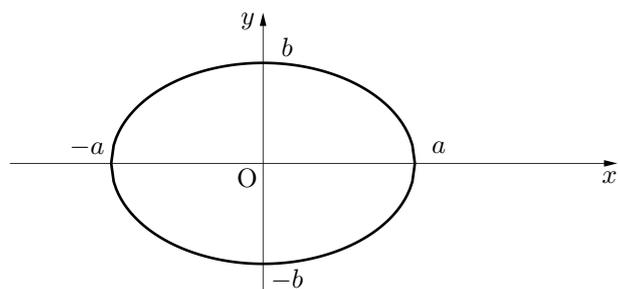
2. 点 A を通る楕円の接線の方程式を求めよ. (S 級 3 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

$$(1) \begin{cases} \text{点 A} & (0, 4) \\ \text{楕円の方程式} & \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{点 A} & (2, -6) \\ \text{楕円の方程式} & \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

反射テスト 曲線 楕円 接線 01 解答解説

1. 点 A を通る楕円の接線の方程式を求めよ。(S 級 3 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

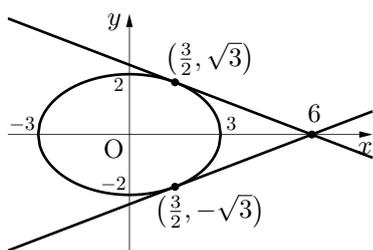


★ 楕円の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b は正) において,
接点 (x_1, y_1) を通る接線の方程式は,
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

となる.

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{点 A} \quad (6, 0) \\ \text{楕円の方程式} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \end{array} \right.$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{9} + \frac{y_1 y}{4} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(6, 0) を通るから, これを代入して,

$$\frac{6x_1}{9} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

接点は楕円上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{3^2} + \frac{(y_1)^2}{2^2} = 1$

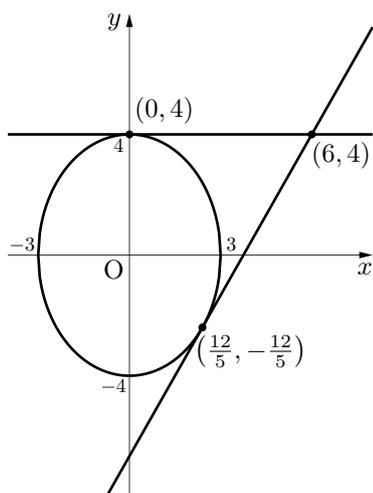
$x_1 = \frac{3}{2}$ を代入して, y_1 について解けば,

$$y_1 = \pm\sqrt{3}$$

上図のように接線が描ける.

接線の方程式は, $\frac{3}{9}x + \frac{\pm\sqrt{3}y}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{6} \pm \frac{\sqrt{3}y}{4} = 1.$

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{点 A} \quad (6, 4) \\ \text{楕円の方程式} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \end{array} \right.$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{9} + \frac{y_1 y}{16} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(6, 4) を通るから, これを代入して,

$$\frac{6x_1}{9} + \frac{4y_1}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x_1}{3} + \frac{y_1}{4} = 1$$

接点は楕円上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{3^2} + \frac{(y_1)^2}{4^2} = 1$

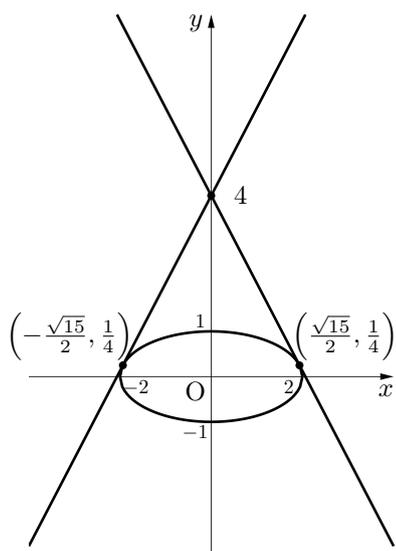
これらを連立方程式と考えて解くと, $(\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}), (0, 4).$

左図のように接線が描ける.

接線の方程式は, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{9}x + \frac{-12}{16}y = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{15}x - \frac{3}{20}y = 1 \\ \frac{0}{9}x + \frac{4}{16}y = 1 \Leftrightarrow y = 4 \end{array} \right.$

2. 点 A を通る楕円の接線の方程式を求めよ. (S 級 3 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

$$(1) \begin{cases} \text{点 A} & (0, 4) \\ \text{楕円の方程式} & \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{4} + \frac{y_1 y}{1} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(0, 4) を通るから, これを代入して,

$$\frac{4y_1}{1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{4}$$

接点は楕円上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{4} + \frac{(y_1)^2}{1} = 1$

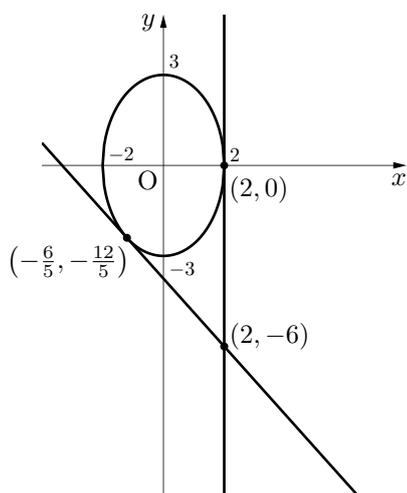
$y_1 = \frac{1}{4}$ を代入して, x_1 について解けば,

$$x_1 = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

左図のように接線が描ける.

$$\text{接線の方程式は, } \frac{\pm\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4}y = 1 \Leftrightarrow \pm \frac{\sqrt{15}}{8}x + \frac{1}{4}y = 1.$$

$$(2) \begin{cases} \text{点 A} & (2, -6) \\ \text{楕円の方程式} & \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$



接点の座標を (x_1, y_1) とすると, 接線の方程式は,

$$\frac{x_1 x}{4} + \frac{y_1 y}{9} = 1 \text{ とおける.}$$

点 A(2, -6) を通るから, これを代入して,

$$\frac{2x_1}{4} + \frac{-6y_1}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} - \frac{2y_1}{3} = 1$$

接点は楕円上にあるから, $\frac{(x_1)^2}{2^2} + \frac{(y_1)^2}{3^2} = 1$

これらを連立方程式と考えて解くと, $(-\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}), (2, 0)$.

左図のように接線が描ける.

$$\text{接線の方程式は, } \begin{cases} \frac{-\frac{6}{5}x}{4} + \frac{-\frac{12}{5}y}{9} = 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{10}x - \frac{4}{15}y = 1 \\ \frac{2x}{4} + \frac{0y}{9} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$