

## 反射テスト 極限 指数関数とはさみうちの原理 01

1. 条件に従って, 次の式の極限值を求めよ. (  $S$  級 3 分 30 秒,  $A$  級 5 分,  $B$  級 7 分,  $C$  級 10 分 )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$$

(1)  $a = \frac{1}{2}$  のとき.

(2)  $a = 2$  のとき. (1) の結果を用いる.

2. 条件に従って, 次の式の極限值を求めよ. ( *S* 級 3 分 30 秒, *A* 級 5 分, *B* 級 7 分, *C* 級 10 分 )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$$

- (1)  $0 < a < 1$  のとき.

- (2)  $1 < a$  のとき. (1) の結果を用いる.

## 反射テスト 極限 指数関数とはさみうちの原理 01 解答解説

1. 条件に従って、次の式の極限値を求めよ. (S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$$

- (1)  $a = \frac{1}{2}$  のとき.

$n = 1, 2, 3, \dots$  に対して,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1^n \\ \Leftrightarrow 1+0 &< 1+\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1+1^n \\ \Leftrightarrow 1 &< 1+\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2 \\ \Leftrightarrow 1^{\frac{1}{n}} &< \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow 1 &< \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき,  $2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  であるから,

はさみうちの原理より,  $\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$

- (2)  $a = 2$  のとき. (1) の結果を用いる.

(1) から,  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} &\rightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 2\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} &= (2^n)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left\{2^n \cdot \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= (2^n + 1)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

よって,  $n \rightarrow \infty$  のとき, 与式は **2** に収束する.

2. 条件に従って、次の式の極限値を求めよ. ( S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$$

- (1)  $0 < a < 1$  のとき.

$n = 1, 2, 3, \dots$  に対して,

$$\begin{aligned} 0 &< a < 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< a^n < 1^n \\ \Leftrightarrow 1+0 &< 1+a^n < 1+1^n \\ \Leftrightarrow 1 &< 1+a^n < 2 \\ \Leftrightarrow 1^{\frac{1}{n}} &< (1+a^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow 1 &< (1+a^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき,  $2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  であるから,  
はさみうちの原理より,  $(1+a^n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$

- (2)  $1 < a$  のとき. (1) の結果を用いる.

$1 < a$  より,  $0 < \frac{1}{a} < 1$  であるから,

(1) から,  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\begin{aligned} \left\{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} &\rightarrow 1 \\ \Leftrightarrow a \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} &\rightarrow a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} &= (a^n)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left\{a^n \cdot \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= (a^n + 1)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

よって,  $n \rightarrow \infty$  のとき, 与式は  $a$  に収束する.