反射テスト　極限　定義　計算方針　01

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分 ）

(1)　$\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

(2)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(x^2 - 1000x\right)$

(3)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

2.　次の極限値を求めよ.（ S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分 ）

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(10000x^3-x^4\right)$

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

反射テスト　極限　定義　計算方針　01　解答解説

1. 次の極限値を求めよ．(S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

★ 極限の計算方針

代入と概算を考えてから, 式の変形をする．

・代入…引数を代入して次の形になるものは式の変形が必要である．

不定形　$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 0^0 など．

・概算…概算には経験が必要だが, 慣れると答えの導き方を考える材料になる．

・式の変形

① $x\to\infty$ の場合 $\frac{1}{x}$ の形を作る

② $x\to a$ (定数) の場合 分母が 0 にならない式を作る．
例えば, 因数分解して $(x-a)$ で約分したり, 平方根を有理化する．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$

代入すると, $\dfrac{0}{0}$ で不定形である．

概算もしてみよう　$1.1^2-1=0.21$, $1.1-1=0.1$ で答えは 2 くらい．

定数の代入だから, 因数分解で約分へ．

$$\text{与式} = \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \quad \leftarrow \text{分子を因数分解する．}$$

$$= \lim_{x\to1}(x+1) = \mathbf{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2-1000x\right)$

代入すると, $\infty-\infty$ で不定形である．

まず概算で, 答えが ∞ であろうと予想できる．

n^2 は 2 次式, $1000n$ は 1 次式で, n が大きくなればなるほど 1000 は相対的に小さくなり無視できる．無限大に近づけば, この式は n^2 と n のどちらが大きいか聞いているようなもの, n^2 の方が断然大きいから, 概算で答えは ∞ であろう．

$$\text{与式} = \lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{1000}{x}\right) \quad \leftarrow \frac{1}{x}\ \text{の形を作る．}$$

$$= \boldsymbol{\infty}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

代入すると, $\infty-\infty$ で不定形である．

まず概算で, 答えが 0 に近いだろうと予想できる．

∞ を代入するので, 次数の小さいものは概算では無視でき, 平方根の中はだいたい x^2 で, $\sqrt{x^2}=x$ ．式全体をみて, $x-x=0$ と概算する．慣れれば, $\sqrt{x^2+1}$ は x より少し大きいから, 0 より少し大きいくらいかなとみることができる．

式変形は, 平方根があるから, まず有理化を考え, ∞ の代入のため, $\frac{1}{x}$ を作る．

$$\text{与式} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{x}{x}} \quad \leftarrow \frac{1}{x}\ \text{を作る．}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = \mathbf{0}$$

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1}$

定数の代入だから, 因数分解で約分へ.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \to 1} \frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} && \leftarrow \text{分子を因数分解する.} \\ &= \lim_{x \to 1} x(x+1) && = \mathbf{2} \end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(10000x^3 - x^4\right)$

x^4 が次数も高く, 速く無限大に近づくだろう. 答えは $-\infty$ と予想できる. ∞ の代入だから, $\frac{1}{x}$ を作る.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \to \infty} x^4 \left(\frac{10000}{x} - 1\right) && \leftarrow \tfrac{1}{x} \text{ の形を作る.} \\ &= \boldsymbol{-\infty} \end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

式変形は, 平方根があるから, まず有理化を考える.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + \frac{x}{x}} && \leftarrow \infty \text{ の代入をしたい. 分子・分母を } x \text{ で割って, } \tfrac{1}{x} \text{を作る.} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$