

反射テスト 極限 定義 性質 01

1. 数列の極限值について考える. 下のように定義したとき, 極限值を求めよ. ただし, **わからないものは「不明」と書くこと.**
(S 級 45 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty$$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n)$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n}$

2. 関数の極限值について考える. 下のように定義したとき, 極限值を求めよ. ただし, **わからないものは「不明」と書くこと.**
(S 級 45 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = -3 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} b(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} c(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} d(x) = -\infty$$

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \{a(x)\}^2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \{b(x) - a(x)\}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} b(x) \cdot c(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \{c(x) - d(x)\}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \{c(x) + d(x)\}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) \cdot d(x)$

反射テスト 極限 定義 性質 01 解答解説

1. 数列の極限值について考える. 下のように定義したとき, 極限值を求めよ. ただし, わからないものは「不明」と書くこと.
(S 級 45 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty$$

$$\star \text{ 数列の極限 } \begin{cases} \text{収束} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ (極限值)} & \text{極限がある} \\ \text{発散} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty & \text{極限がある} \\ \text{発散} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty & \text{極限がある} \\ \text{発散} & \text{振動} & \text{極限はない} \end{cases}$$

☆振動の具体例 $a_n = (-1)^n$ は n が奇数なら -1 , 偶数なら $+1$. 発散の一種だが, 極限はないと考える.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

☆収束するものについては, 四則演算が成り立つ.

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= 0 - 1 = -1$$

☆収束するものについては, 四則演算が成り立つ.

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \div \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$= \frac{1}{0}$$

不定形であるから, 不明

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

$$= 1 \cdot \infty = \infty$$

★ $\frac{1}{0}$ は不定形.

☆ $\frac{1}{0} = \infty$ と考えるのは実は悪くない.

0 への収束は + からだけではなく - からの収束もある.

つまり $\infty, -\infty$ のどちらに発散するかわからない.

$$\text{具体例} \begin{cases} b_n = \frac{1}{n} & \text{なら, 1(3) の答えは } \infty \\ b_n = -\frac{1}{n} & \text{なら, 1(3) の答えは } -\infty \end{cases}$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n)$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

$$= \infty - \infty$$

不定形であるから, 不明

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n}$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \div \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

$$= -\frac{\infty}{\infty}$$

不定形であるから, 不明

★ $\infty - \infty$ は不定形.

どちらの無限大が強いかわからないので,

収束するか発散するかも不明, かつ正負も不明.

無限大の強弱の定義は難しいので,

ここでは雰囲気としての理解で構わない.

★ $\frac{\infty}{\infty}$ は不定形.

どちらの無限大が強いかわからないので,

収束するか発散するかも不明.

分子が強ければ, $-\infty$ に発散するだろう.

分母が強ければ, 0 に収束する.

強さが同じであれば, ある負の数に収束する.

2. 関数の極限值について考える. 下のように定義したとき, 極限值を求めよ. ただし, **わからないものは「不明」と書くこと.**
(S 級 45 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} b(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} c(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} d(x) = -\infty$$

$$\star \text{ 関数の極限 } \begin{cases} \text{収束} & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \text{ (極限值)} & \text{極限がある} \\ \text{発散} & \lim_{x \rightarrow \infty} = \infty & \text{極限がある} \\ \text{発散} & \lim_{x \rightarrow \infty} = -\infty & \text{極限がある} \\ \text{発散} & \text{振動} & \text{極限はない} \end{cases}$$

☆振動の具体例 $f(x) = \sin x$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \{a(x)\}^2$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} a(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} a(x)$$

$$= -3 \cdot (-3) = 9$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \{b(x) - a(x)\}$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 1} b(x) - \lim_{x \rightarrow 1} a(x)$$

$x \rightarrow 1$ の定義はわからないので, **不明**

☆収束するものについては, 四則演算が成り立つ.

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} b(x) \cdot c(x)$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 1} b(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} c(x)$$

$$= 0 \cdot \infty$$

不定形であるから, **不明**

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \{c(x) - d(x)\}$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} c(x) - \lim_{x \rightarrow 0} d(x)$$

$$= \infty + \infty$$

∞

★ $0 \cdot \infty$ は不定形.

どちらが強いかわからないので,

収束するか発散するかも不明.

0の方が強ければ, 0に収束する.

∞ の方が強ければ, 発散する.

ただし, 0への収束が負の方から

来ていることもあるので, 正負は不明.

強さが同じであれば, 収束することもある.

☆ $\infty + \infty = \infty$.

同様に

☆ $-\infty - \infty = -\infty$.

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \{c(x) + d(x)\}$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} c(x) + \lim_{x \rightarrow 0} d(x)$$

$$= \infty - \infty$$

不定形であるから, **不明**

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} c(x) \cdot d(x)$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} c(x) \div \lim_{x \rightarrow 0} d(x)$$

$$= \infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

☆ $\infty \cdot \infty = \infty$

★ $\infty - \infty$ は不定形.

どちらの無限大が強いかわからないので,

収束するか発散するかも不明, かつ正負も不明.