

反射テスト 関数 一致 01

1. $f(x) = x^3 + a$ に対し, $g(f(x)) = f(g(x))$ を満たす 1 次関数 $g(x)$ を求めよ.
(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

2. $f(x) = x^3 + ax + b$ に対し, $g(f(x)) = f(g(x))$ を満たす 1 次関数 $g(x)$ を求めよ.

(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

反射テスト 関数 一致 01 解答解説

1. $f(x) = x^3 + a$ に対し, $g(f(x)) = f(g(x))$ を満たす 1 次関数 $g(x)$ を求めよ.

(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

★ 関数の一致

関数 $y = f(x)$ が, 関数 $y = g(x)$ と一致するとは,

- ① 定義域が一致する.
- ② 定義域内の全ての x について, $f(x) = g(x)$ が成立.

1 次関数 $g(x) = sx + t$ とする. 条件から, $s \neq 0$.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= s(x^3 + a) + t \\ &= sx^3 + as + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (sx + t)^3 + a \\ &= s^3x^3 + 3s^2tx^2 + 3st^2x + t^3 + a \end{aligned}$$

これらが一致するので,

$$\begin{aligned} s &= s^3 & \text{かつ} & & 3s^2t &= 0 & \text{かつ} & & 3st^2 &= 0 & \text{かつ} & & as + t &= t^3 + a \\ \Leftrightarrow s(s+1)(s-1) &= 0 & \text{かつ} & & s^2t &= 0 & \text{かつ} & & st^2 &= 0 & \text{かつ} & & a(s-1) &= t^3 - t \end{aligned}$$

$s \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} s(s+1)(s-1) &= 0 \text{ より, } s = \pm 1 \\ s^2t &= 0 \text{ より, } t = 0 \end{aligned}$$

これらは, $st^2 = 0$ を満たす.

$t = 0$ を用いて,

$$\begin{aligned} a(s-1) &= t^3 - t \Rightarrow a(s-1) = 0 \\ s &= 1 \text{ のとき, この等式は } a \text{ の値に関係なく, 成立.} \\ s &= -1 \text{ のとき, } a = 0 \end{aligned}$$

以上の結果から,

$$\begin{aligned} a &= 0 \text{ のとき, } g(x) = x \text{ または } g(x) = -x \\ a &\neq 0 \text{ のとき, } g(x) = x \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^3 + ax + b$ に対し, $g(f(x)) = f(g(x))$ を満たす 1 次関数 $g(x)$ を求めよ.

(S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

★関数の一致

関数 $y = f(x)$ が, 関数 $y = g(x)$ と一致するとは,

- ① 定義域が一致する.
- ② 定義域内の全ての x について, $f(x) = g(x)$ が成立.

1 次関数 $g(x) = sx + t$ とする. 条件から, $s \neq 0$.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= s(x^3 + ax + b) + t \\ &= sx^3 + asx + bs + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (sx + t)^3 + a(sx + t) + b \\ &= s^3x^3 + 3s^2tx^2 + 3st^2x + t^3 + asx + at + b \\ &= s^3x^3 + 3s^2tx^2 + (3st^2 + as)x + t^3 + at + b \end{aligned}$$

これらが一致するので,

$$\begin{aligned} s &= s^3 & \text{かつ} & & 3s^2t &= 0 & \text{かつ} & & as &= 3st^2 + as & \text{かつ} & & bs + t &= t^3 + at + b \\ \Leftrightarrow s(s+1)(s-1) &= 0 & \text{かつ} & & s^2t &= 0 & \text{かつ} & & st^2 &= 0 & \text{かつ} & & bs + t &= t^3 + at + b \end{aligned}$$

$s \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} s(s+1)(s-1) &= 0 \text{ より, } s = \pm 1 \\ s^2t &= 0 \text{ より, } t = 0 \end{aligned}$$

これらは, $st^2 = 0$ を満たす.

$t = 0$ を用いて,

$$\begin{aligned} bs + t &= t^3 + at + b \Rightarrow bs = b \Leftrightarrow b(s-1) = 0 \\ s = 1 \text{ のとき, } &\text{この等式は } b \text{ の値にかかわらず, 成立する.} \\ s = -1 \text{ のとき, } &b = 0 \end{aligned}$$

以上の結果から,

$$\begin{aligned} b = 0 \text{ のとき, } &g(x) = x \text{ または } g(x) = -x \\ b \neq 0 \text{ のとき, } &g(x) = x \end{aligned}$$