

反射テスト 関数 逆関数 性質 01

1. 実数関数 $y = f(x)$ と, その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の交点の座標を求めよ.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1)
$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

(2)
$$f(x) = \sqrt{4x-1}$$

2. 実数関数 $y = f(x)$ と, その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の交点の座標を求めよ.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(2) $f(x) = \sqrt{x+6}$

反射テスト 関数 逆関数 性質 01 解答解説

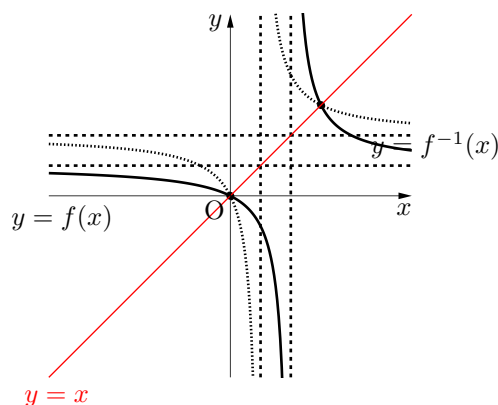
1. 実数関数 $y = f(x)$ と、その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の交点の座標を求めよ。

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 逆関数のグラフ

$y = x$ に関して線対称である。よって、ある関数とその逆関数の交点は、必ず $y = x$ 上にある。

(1) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$



$f(x)$ は実数関数であるから, $x \neq 1$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+2}{x-1} \\ &= 2 + \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

$$y = f(x) \quad (\text{左図破線}) \quad \begin{cases} \text{定義域} & x \neq 1 \\ \text{値域} & y \neq 2 \end{cases}$$

よって、逆関数は $y = 1 + \frac{2}{x-2}$ (左図実線)

定義域 $x \neq 2$

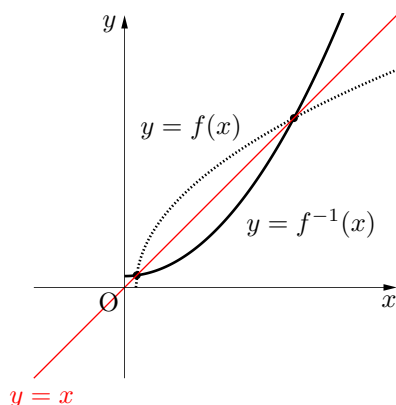
値域 $y \neq 1$

交点は $y = x$ 上であって、2つの関数の定義域内にあるので、 $x \neq 1$ かつ $x \neq 2$ の条件下で連立方程式を解く。

$$x = 1 + \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3$$

答えは $(0, 0)$, $(3, 3)$

(2) $f(x) = \sqrt{4x-1}$



$f(x)$ は実数関数であるから、

$$y = f(x) \quad (\text{左図破線}) \quad \begin{cases} \text{定義域} & x \geq \frac{1}{4} \\ \text{値域} & y \geq 0 \end{cases}$$

逆関数は $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ (左図実線)

定義域 $x \geq 0$

値域 $y \geq \frac{1}{4}$

交点は $y = x$ 上であって、2つの関数の定義域内にあるので、

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4x-1} \quad \text{かつ} \quad x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4x-1 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 &= 0 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{かつ} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$2 - \sqrt{3}$ も正なので、

答えは $(2 \pm \sqrt{3}, 2 \pm \sqrt{3})$ 複号同順

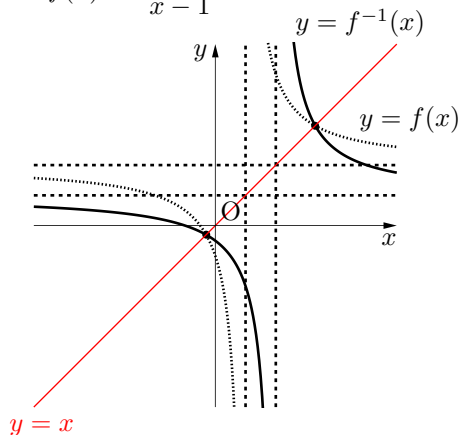
2. 実数関数 $y = f(x)$ と、その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ の交点の座標を求めよ。

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 逆関数のグラフ

$y = x$ に関して線対称である。よって、ある関数とその逆関数の交点は、必ず $y = x$ 上にある。

(1) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$



$f(x)$ は実数関数であるから, $x \neq 1$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+3}{x-1} \\ &= 2 + \frac{3}{x-1} \end{aligned}$$

$$y = f(x) \quad (\text{左図破線}) \quad \begin{cases} \text{定義域} & x \neq 1 \\ \text{値域} & y \neq 2 \end{cases}$$

よって、逆関数は $y = 1 + \frac{3}{x-2}$ (左図実線)

定義域 $x \neq 2$

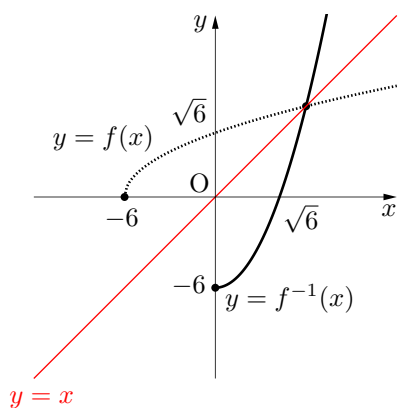
値域 $y \neq 1$

交点は $y = x$ 上にあつて、2つの関数の定義域内にあるので、
 $x \neq 1$ かつ $x \neq 2$ の条件下で連立方程式を解く。

$$x = 2 + \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

答えは $\left(\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \right)$ 複号同順

(2) $f(x) = \sqrt{x+6}$



$f(x)$ は実数関数であるから、

$$y = f(x) \quad (\text{左図破線}) \quad \begin{cases} \text{定義域} & x \geq -6 \\ \text{値域} & y \geq 0 \end{cases}$$

逆関数は $y = x^2 - 6$ (左図実線)

定義域 $x \geq 0$

値域 $y \geq -6$

交点は $y = x$ 上にあつて、2つの関数の定義域内にあるので、

$$x = \sqrt{x+6} \quad \text{かつ} \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x+6 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2, 3 \quad \text{かつ} \quad x \geq 0$$

よって、 $x = 3$

答えは $(3, 3)$

☆この問題のように、関数の定義域・値域の両方を調べていないと、最後に適切な解を求められない。