

反射テスト 微分 最大最小 応用 01

1. 次の関数の最小値を求めよ. (S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分)

$$y = x^x . \text{ ただし, } x > 0 .$$

2. 自然数 n に対して, $n^{\frac{1}{n}}$ の最大値を求めよ. (S 級 6 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 15 分)

反射テスト 微分 最大最小 応用 01 解答解説

1. 次の関数の最小値を求めよ. (S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分)

$$y = x^x \text{ . ただし, } x > 0 \text{ .}$$

対数微分法を用いる.

$$\log y = x \log x$$

$$(\log y)' = (x \log x)'$$

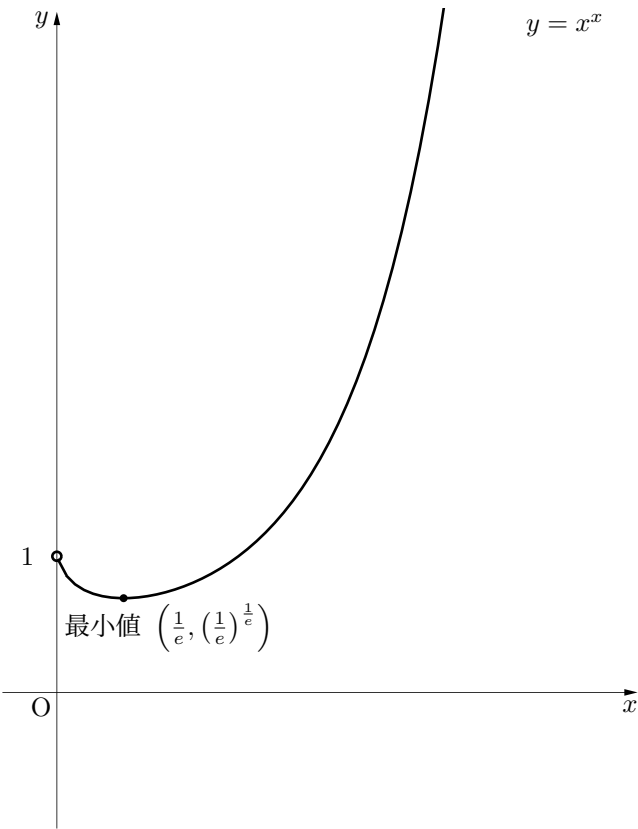
$$\frac{y'}{y} = 1 + \log x$$

$$y' = x^x (1 + \log x)$$

$$x > 0 \text{ から, } x^x > 0 \text{ である. } \Rightarrow y' = 0 \text{ を解いて, } x = \frac{1}{e} \text{ .}$$

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
y'	/	-	0	+
y	/	\	極小値	/

増減表から, $y = x^x$ の最小値は, $x = \frac{1}{e}$ のときの, $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.



☆ $y = x^x$ のグラフ

$$y'' = x^x (1 + \log x)^2 + \frac{x^x}{x}$$

$x > 0$ において,

$$x^x (1 + \log x)^2 \geq 0 \text{ かつ } \frac{x^x}{x} > 0 \text{ であるから,}$$

$$y'' > 0 \text{ となり, } y = x^x \text{ は 凹型の関数である .}$$

グラフを描く上で難しいのは, $x = 0$ の極限值.

$$y = x^x = e^{x \log x} \text{ と考える.}$$

$$x = \frac{1}{z} \text{ とすると, } x \log x = -\frac{\log z}{z}$$

$$x \rightarrow +0 \text{ のとき, } z \rightarrow \infty \text{ から, } -\frac{\log z}{z} \rightarrow 0$$

$$\text{よって, } x \log x \rightarrow 0 \text{ となって, } x^x \rightarrow 1 \text{ .}$$

$$\frac{\log z}{z} \rightarrow 0 \text{ の証明は, } z = e^w \text{ とおいて,}$$

$$e^w > 1 + w + \frac{1}{2}w^2 \text{ から言う.}$$

2. 自然数 n に対して, $n^{\frac{1}{n}}$ の最大値を求めよ. (S 級 6 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 15 分)

実数 $x > 0$ に対して, $y = x^{\frac{1}{x}}$ を考える.

両辺の自然対数をとると,

$$\begin{aligned}\log y &= \log x^{\frac{1}{x}} && \leftarrow \text{両辺の自然対数をとる.} \\ (\log y)' &= \left(\frac{1}{x} \log x \right)' && \leftarrow \text{両辺を } x \text{ について微分する.} \\ \frac{y'}{y} &= \left(\frac{1}{x} \right)' \log x + \frac{1}{x} \cdot (\log x)' \\ \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x^2} \\ y' &= \frac{y}{x^2} (1 - \log x) \\ y' &= x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \log x)\end{aligned}$$

増減表

x	0	...	e	...
y'	値なし	+	0	-
y	値なし	↗	極大値	↘

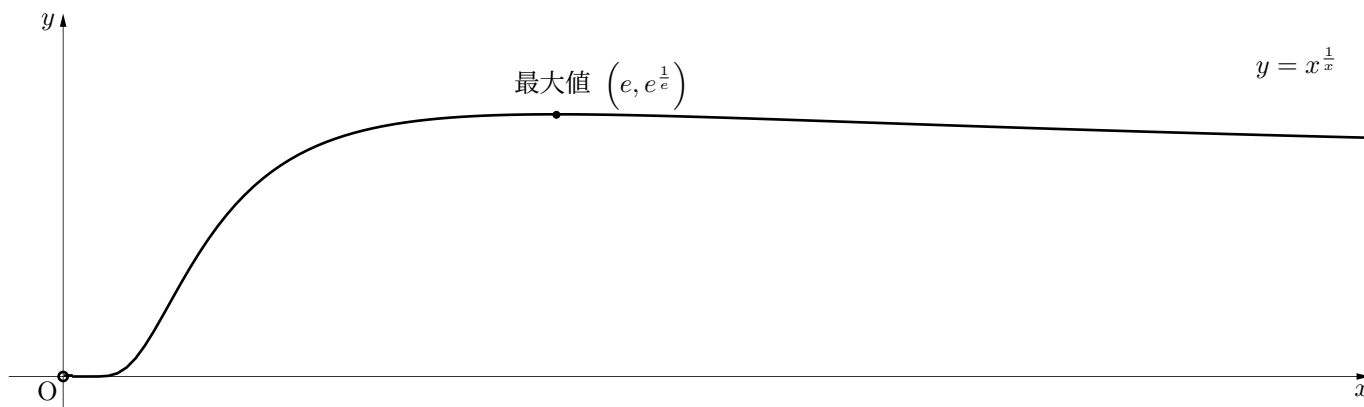
x が自然数のとき, $x = e$ の前後に y の最大値がありそう.

ネイピア数 e はおよそ 2.718 くらいなので, $x = 2$ のときと, $x = 3$ のときを比較する.

$2^{\frac{1}{2}}$ と $3^{\frac{1}{3}}$ の大小関係は,

両者ともに 6 乗すれば, 2^3 と 3^2 となる. 後者の方が大きいから, 増減表の結果と合わせて, x が自然数のとき,
 $1^{\frac{1}{1}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}} > \dots$ となる.

$n^{\frac{1}{n}}$ は, $n = 3$ のとき, 最大値 $3^{\frac{1}{3}}$ をとる.



☆ $y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフ

$$y'' = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4} \cdot \{1 - 3x + 2(x-1)\log x + (\log x)^2\}$$

$x > 0$ において,

$x = 0$ の近くでは y'' は 0 に近い正, $x = e$ の近くでは y'' は負, x が十分大きいと y'' は正から 0 に近づく.

また,

$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{x}} = 0$. $x = 0$ の近傍では, $y' \rightarrow 0$ でもあるので, $x^{\frac{1}{x}}$ は漸近線 $y = 0$ に収束.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ より, $x \rightarrow \infty$ の漸近線は $y = 1$ である.

以上から, $y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフは上図のようになる.