

反射テスト 微分 グラフ図示 02

1. xy 座標平面に図示せよ. 極値, 変曲点の x 座標も示せ. (S 級 4 分, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 11 分)
 $y = e^{-x^2}$.

2. xy 座標平面に図示せよ. 極値, 変曲点の x 座標も示せ. (S 級 4 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 11 分)
- $y = e^{x-x^2}$.

反射テスト 微分 グラフ図示 02 解答解説

1. xy 座標平面に図示せよ. 極値, 変曲点の x 座標も示せ. (S 級 4 分, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 11 分)

$$y = e^{-x^2}.$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= -2xe^{-x^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \text{ を解いて, } x = 0.$$

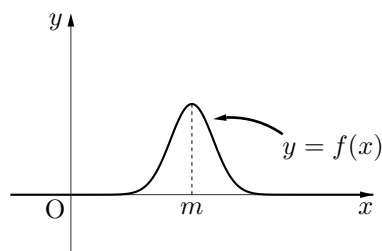
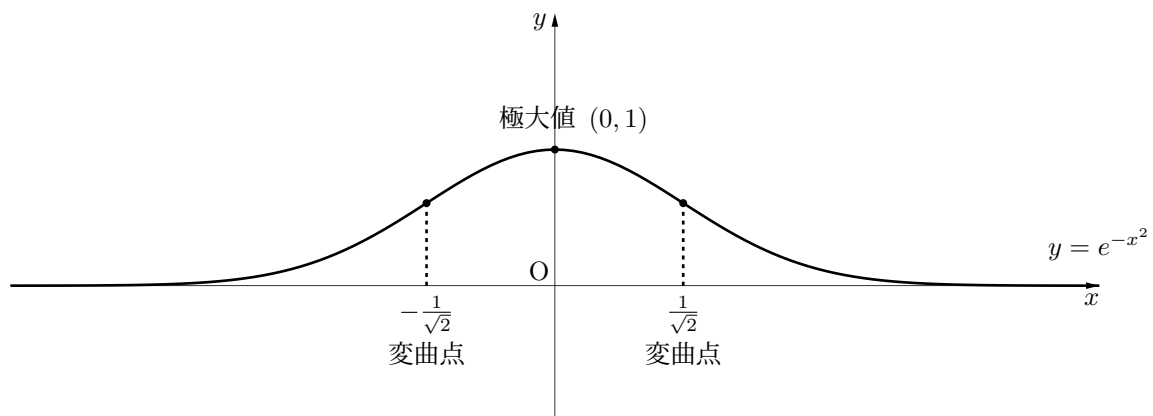
$$\begin{aligned} y'' &= (-2x)' \cdot e^{-x^2} + (-2x) \cdot (e^{-x^2})' \\ &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \text{ を解いて, } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ &= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y		変曲点		極大値 1		変曲点	

また,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0.$$

であるから, グラフは下図のようになる.



上の関数が元になって, 正規分布の関数が作られた.

★ 正規分布 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m, \sigma \text{ は実数で, } \sigma \geq 0) \cdots e \text{ はネイピア定数で約 } 2.718.$$

で与えられているとき, X は 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うといい, $y = f(x)$ のグラフを 正規分布曲線 という. X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき,

期待値 $E(X) = m$, 標準偏差 $\sigma(X) = \sigma$

2. xy 座標平面に図示せよ. 極値, 変曲点の x 座標も示せ. (S 級 4 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 11 分)

$$y = e^{x-x^2}.$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{x-x^2} \cdot (1-2x) \\ &\Rightarrow y' = 0 \text{ を解いて, } x = \frac{1}{2}. \\ &= (1-2x)e^{x-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (1-2x)' \cdot e^{x-x^2} + (1-2x) \cdot (e^{x-x^2})' \\ &= -2e^{x-x^2} + (1-2x)(1-2x)e^{x-x^2} \quad \Rightarrow y'' = 0 \text{ を解いて, } x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}. \\ &= (4x^2 - 4x - 1)e^{x-x^2} \end{aligned}$$

x	...	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y		変曲点		極大値 $e^{\frac{1}{4}}$		変曲点	

また,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-x^2} = 0.$$

であるから, グラフは下図のようになる.

