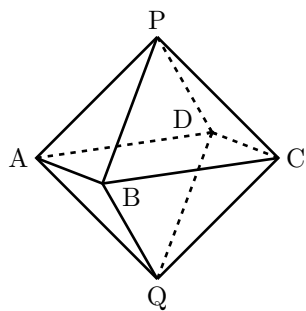


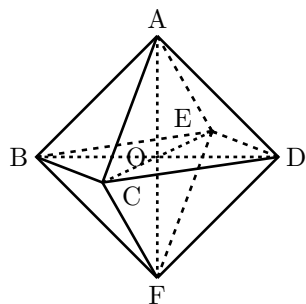
反射テスト ベクトル 正八面体 01

1. 空間に正八面体 $PABCDQ$ を考える. $ABCD$ は正方形で, $PABCD$ は正四角すい, $QABCD$ も正四角すい. 正八面体は全ての面が正三角形で, その一辺の長さを 1 とする. また $\vec{a} = \vec{PA}$, $\vec{b} = \vec{PB}$, $\vec{c} = \vec{PC}$ とおく.
- (S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分)



- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ それぞれ求めよ.
- (2) $\vec{PQ}$, $\vec{PD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
- (3) 正八面体 $PABCDQ$ の体積を求めよ.

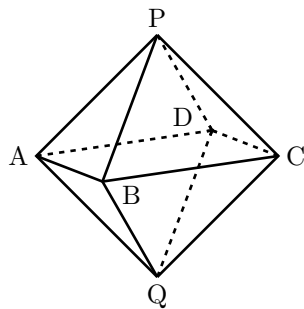
2. 空間に一辺の長さが1の正八面体 ABCDEF を考え, 正八面体の重心を O とする. $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおく.
(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 40 秒, C 級 7 分)



- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.
- (2) $\vec{OD}$, $\vec{OE}$, $\vec{OF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
- (3) 正三角形 ABC の重心を G, 正三角形 DEF の重心を H とする.
 $\vec{OG}$, $\vec{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
- (4) GH の長さを求めよ.

反射テスト ベクトル 正八面体 01 解答解説

1. 空間に正八面体 PABCDQ を考える. ABCD は正方形で, PABCD は正四角すい, QABCD も正四角すい. 正八面体は全ての面が正三角形で, その一辺の長さを 1 とする. また $\vec{a} = \vec{PA}$, $\vec{b} = \vec{PB}$, $\vec{c} = \vec{PC}$ とおく.
(S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分 20 秒, C 級 5 分)



- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ それぞれ求めよ.
- (2) $\vec{PQ}$, $\vec{PD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
- (3) 正八面体 PABCDQ の体積を求めよ.

(1)

PAB は正三角形であるから, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

PAQC は正方形であるから, $\vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$.

(2)

PAQC が正方形だから,
 $\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{PC} = \vec{a} + \vec{c}$.

PBQD も正方形だから, $\vec{QD} \parallel \vec{BP}$ より,
 $\vec{PD} = \vec{BQ} = \vec{PQ} - \vec{PB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.

(3)

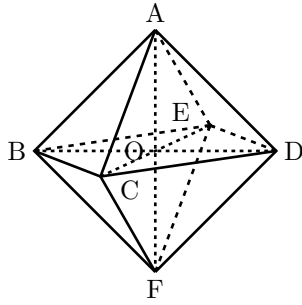
(1), (2) から,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= |\vec{a} + \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &\Leftrightarrow 1 + 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$

よって, $PQ = \sqrt{2}$ であるから,

$$\begin{aligned} \text{PABCDQ} &= \text{正方形 ABCD} \times PQ \times \frac{1}{3} \\ &= 1^2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

2. 空間に一辺の長さが1の正八面体 ABCDEF を考え、正八面体の重心を O とする. $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおく.
(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 40 秒, C 級 7 分)



- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.
- (2) $\vec{OD}$, $\vec{OE}$, $\vec{OF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
- (3) 正三角形 ABC の重心を G, 正三角形 DEF の重心を H とする.
 $\vec{OG}$, $\vec{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.
- (4) GH の長さを求めよ.

(1)

$\angle AOB$ は直角であるから, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
対称性から, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

(2)

図と対称性から,
 $\vec{OD} = -\vec{b}$, $\vec{OE} = -\vec{c}$, $\vec{OF} = -\vec{a}$.

(3) (2) から,

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\vec{OH} = \frac{\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}}{3} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$$

(4) (3) から,

$$\vec{GH} = \vec{OH} - \vec{OG} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = 1 \text{ と対称性から, } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$|\vec{GH}|^2 = \frac{4}{9} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \right) = \frac{2}{3}$$

$$GH = \frac{\sqrt{6}}{3}$$