

反射テスト ベクトル 正四面体 01

1. 空間に正四面体 ABCD を考える. 正四面体 ABCD は全ての面が正三角形で, その一辺の長さを 1 とする.

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおく.

(S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

(1) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.

(2) 三角形 BCD の重心を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表せ.

(3) 正四面体 ABCD の体積を求めよ.

2. 空間に正四面体 ABCD を考える. 正四面体 ABCD は全ての面が正三角形で, その一辺の長さを a とする.

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおく.

(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分 20 秒, C 級 8 分)

(1) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.

(2) 三角形 BCD の重心を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表せ.

(3) 正四面体 ABCD の重心を G とする. $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表せ.

(4) 正四面体 ABCD の内接球, 外接球の半径をそれぞれ求めよ.

反射テスト ベクトル 正四面体 01 解答解説

1. 空間に正四面体 ABCD を考える. 正四面体 ABCD は全ての面が正三角形で, その一辺の長さを 1 とする.

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}, \vec{d} = \overrightarrow{AD} \text{ とおく.}$$

(S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分)

- (1) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \text{ であるから,}$$

$$BC = 1$$

$$\Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{b}| = 1$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$$

- (2) 三角形 BCD の重心を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ.

$$\text{平均になるので, } \overrightarrow{AH} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}.$$

- (3) 正四面体 ABCD の体積を求めよ.

- (1) と対称性から,

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}.$$

- (2) から,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AH}|^2 &= \left| \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} + 2\vec{d} \cdot \vec{b} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって, $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ である. また正三角形 BCD の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから,

$$\text{正四面体 ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

2. 空間に正四面体 ABCD を考える. 正四面体 ABCD は全ての面が正三角形で, その一辺の長さを a とする.

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおく.

(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分 20 秒, C 級 8 分)

- (1) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.

$|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ であるから,

$$BC = a \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{b}| = a$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{a^2}{2}$$

- (2) 三角形 BCD の重心を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表せ.

$$\text{平均になるので, } \overrightarrow{AH} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}.$$

- (3) 正四面体 ABCD の重心を G とする. $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表せ.

$$\text{平均になるので, } \overrightarrow{AG} = \frac{\vec{0} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

☆別解 重心の平均に気づかなければ, $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{BG}|$ を解く.

- (4) 正四面体 ABCD の内接球, 外接球の半径をそれぞれ求めよ.

内接球は中心 G で, 各面に接するので, 半径の長さは GH に等しい.

外接球は中心 G で, 各頂点に接するので, 半径の長さは AG に等しい.

(2) と (3) から,

$$|\overrightarrow{AG}| : |\overrightarrow{GH}| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \right| : \left| \left(\frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} \right) - \left(\frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \right) \right| = 3 : 1$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG}^2 &= \left| \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4^2} \cdot \left(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} + 2\vec{d} \cdot \vec{b} \right) = \frac{3}{8}a^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } AG = |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{\frac{3}{8}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a. \quad GH = |\overrightarrow{GH}| = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{AG}| = \frac{\sqrt{6}}{12}a.$$

以上から, 内接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{12}a$, 外接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.