反射テスト　ベクトル　空間　ベクトル方程式　平面　01

1.　3次元空間 (xyz 空間) において, 次の平面を表す方程式を求めよ. ベクトル方程式の場合, 動点 P , その位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$, 変数は実数 s, t を用いてよい.　(S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1)　$\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(1, 2, 0)$ のときの平面 OAB.

(2)　$\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 1, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 1)$ のときの平面 ABC.

(3)　$\mathrm{A}(0, -1, 1)$ を通り, 法線ベクトル $(1, 0, -1)$ の平面.

2. 3 次元空間 (xyz 空間) において, 次の平面を表す方程式を求めよ. ベクトル方程式の場合, 動点 P , その位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$, 変数は実数 s, t を用いてよい.

(S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $\mathrm{A}(1, 1, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 2, -1)$ のときの平面 OAB.

(2) $\mathrm{A}(0, 1, 3)$, $\mathrm{B}(0, 2, -1)$, $\mathrm{C}(1, 0, -1)$ のときの平面 ABC.

(3) $\mathrm{A}(2, -1, 4)$ を通り, 法線ベクトル $(1, -1, -1)$ の平面.

反射テスト　ベクトル　空間　ベクトル方程式　平面　01　解答解説

1. 　3 次元空間 (xyz 空間) において, 次の平面を表す方程式を求めよ. ベクトル方程式の場合, 動点 P , その位置ベクトルを $\vec{p}$, 変数は実数 s, t を用いてよい. (S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 平面のベクトル方程式

3 次元空間において 3 点を通る平面は 1 つしかない. 3 点 A,B,C の位置ベクトルが $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のとき, この 3 点が作る平面上の動点 P は実数 s, t, u を用いて, 次のように表される.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ かつ $s + t + u = 1$

u を消去して,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c}$

としてもいい. 点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすれば, 次の方程式も同値である.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff \vec{p} - \vec{a} = s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \iff \vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

(1)　A$(1, 0, 0)$, B$(1, 2, 0)$ のときの平面 OAB.

実数 s, t に対して, 平面上の点 P を表すベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \iff \vec{p} &= s\,(1, 0, 0) + t\,(1, 2, 0) \\ \iff \vec{p} &= (s + t, 2t, 0) \end{aligned}$$

☆答えの表記はいろいろある.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{AO}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \iff \vec{p} - \vec{a} &= -s\vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \\ \iff \vec{p} &= (1 - s - t)\vec{a} + t\vec{b} \\ \iff \vec{p} &= (1 - s, 2t, 0) \end{aligned}$$

他にも, $\vec{p} = (s, t, 0)$ や $z = 0$ も正解である.

(2)　A$(1, 0, 0)$, B$(2, 1, 0)$, C$(0, 0, 1)$ のときの平面 ABC.

実数 s, t に対して, 平面上の点 P を表すベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1 - s - t)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \iff \vec{p} &= s(1, 0, 0) + t(2, 1, 0) + (1 - s - t)(0, 0, 1) \\ \iff \vec{p} &= (s + 2t, t, 1 - s - t) \end{aligned}$$

(3)　A$(0, -1, 1)$ を通り, 法線ベクトル $(1, 0, -1)$ の平面.

★法線ベクトル … 平面に垂直なベクトル.
この平面上の点 P(x, y, z) を定めると,
平面上の点 P を表すベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ \iff & \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ \iff & (x, y + 1, z - 1) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\ \iff & x - (z - 1) = 0 \\ \iff & x - z + 1 = 0 \end{aligned}$$

☆ 3 元の 1 次方程式は 3 次元空間の平面を表す.

2. 3 次元空間 (xyz 空間) において, 次の平面を表す方程式を求めよ. ベクトル方程式の場合, 動点 P , その位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$, 変数は実数 s, t を用いてよい.
(S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) A$(1,1,2)$, B$(-1,2,-1)$ のときの平面 OAB.

実数 s, t に対して, 平面上の点 P を表すベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{p} &= s\,(1,1,2) + t\,(-1,2,-1) \\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\overrightarrow{p}} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{(s-t, s+2t, 2s-t)} \end{aligned}$$

(2) A$(0,1,3)$, B$(0,2,-1)$, C$(1,0,-1)$ のときの平面 ABC.

実数 s, t に対して, 平面上の点 P を表すベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-s-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{p} &= s(0,1,3) + t(0,2,-1) + (1-s-t)(1,0,-1) \\ \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\overrightarrow{p}} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{(1-s-t, s+2t, 4s-1)} \end{aligned}$$

(3) A$(2,-1,4)$ を通り, 法線ベクトル $(1,-1,-1)$ の平面.

★法線ベクトル $\cdots$ 平面に垂直なベクトル.
この平面上の点 P(x,y,z) を定めると,
平面上の点 P を表すベクトル方程式は,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (1,-1,-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot (1,-1,-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2, y+1, z-4) \cdot (1,-1,-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x-2-(y+1)-(z-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{x-y-z+1=0} \end{aligned}$$

☆ 3 元の 1 次方程式は 3 次元空間の平面を表す.