

反射テスト ベクトル 空間 ベクトル方程式 直線 01

1. 3次元空間において、次の直線を表す方程式を求めよ。ベクトル方程式の場合、動点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$, 変数は実数 t を用いてよい。
(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $A(1, 2, 0)$ のときの直線 OA.

(2) $A(1, -1, 2)$ を通る, 方向ベクトル $(1, 0, 0)$ の直線.

(3) $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$ のときの直線 AB.

(4) ある実数 s を用いて, ベクトル方程式 $\vec{OQ} = (s, 3s, 2)$ で表される直線と平行で, $A(3, -1, -2)$ を通る直線.

2. 3次元空間において、次の直線を表す方程式を求めよ。ベクトル方程式の場合、動点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$, 変数は実数 t を用いてよい。
(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $A(1, -2, 1)$ のときの直線 OA.

(2) $A(-4, 3, 2)$ を通る, 方向ベクトル $(1, 1, -1)$ の直線.

(3) $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, -1)$ のときの直線 AB.

(4) ある実数 s を用いて, ベクトル方程式 $\vec{OQ} = (s+1, 2s, 2-s)$ で表される直線と平行で, $A(1, -2, 3)$ を通る直線.

反射テスト ベクトル 空間 ベクトル方程式 直線 01 解答解説

1. 3次元空間において、次の直線を表す方程式を求めよ。ベクトル方程式の場合、動点Pの位置ベクトルを $\vec{p}$ 、変数は実数 t を用いてよい。
(S級1分45秒, A級2分40秒, B級4分, C級6分)

★直線のベクトル方程式

空間で直線を表すベクトル方程式は、直線上の動点について言えばよい。

直線上の点P($\vec{p}$)、方向ベクトル $\vec{d}$ 、定点A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$)とすれば、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \vec{p} &= \vec{a} + t\vec{d} \\ \textcircled{2} \quad \vec{p} &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \end{aligned}$$

①で、方向ベクトルを $(\vec{b} - \vec{a})$ とすれば、②と同値である。

②は、線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点の位置ベクトルでもある。

(1) A(1, 2, 0)のときの直線OA.

(2) A(1, -1, 2)を通る、方向ベクトル(1, 0, 0)の直線.

実数 t に対して、直線上の点Pを表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= t\vec{OA} \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= t(1, 2, 0) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (t, 2t, 0) \end{aligned}$$

実数 t に対して、直線上の点Pを表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + t(1, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (1, -1, 2) + t(1, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (t+1, -1, 2) \end{aligned}$$

☆答えの表記はいろいろある。実数 $-\frac{t}{2}$ 倍と考えると、

$\vec{OP} = (-\frac{t}{2}, -t, 0)$ としても正解である。

ただし、ベクトル方程式を作る問題であるから、

$(-\frac{t}{2}, -t, 0)$ とのみの表記は間違えである。

また、 $\vec{p} = (x, y, z)$ として、 t を消去する。

$$(x, y, z) = (t, 2t, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

も正解である。

これは3次元座標空間における直線の方程式である。

(3) A(1, 0, 1), B(-1, 1, 2)のときの直線AB.

(4) ある実数 s を用いて、ベクトル方程式 $\vec{OQ} = (s, 3s, 2)$ で表される直線と平行で、A(3, -1, -2)を通る直線.

実数 t に対して、直線上の点Pを表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (1-t)(1, 0, 1) + t(-1, 1, 2) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (1-2t, t, 1+t) \end{aligned}$$

☆別解

$\vec{p} = (x, y, z)$ として、 t を消去する。

$$(x, y, z) = (1-2t, t, 1+t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{-2} = y = z-1$$

も正解である。

これは3次元座標空間における直線の方程式である。

$$\vec{OQ} = (0, 0, 2) + s(1, 3, 0)$$

であるから、方向ベクトルは(1, 3, 0)。

この直線と平行な直線は方向ベクトルが一致するから、実数 t に対して、求める直線のベクトル方程式は、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + t(1, 3, 0) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (3, -1, -2) + t(1, 3, 0) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (t+3, 3t-1, -2) \end{aligned}$$

2. 3次元空間において、次の直線を表す方程式を求めよ。ベクトル方程式の場合、動点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ 、変数は実数 t を用いてよい。
(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) A(1, -2, 1) のときの直線 OA.

実数 t に対して、直線上の点 P を表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= t\vec{OA} \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= t(1, -2, 1) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (t, -2t, t)\end{aligned}$$

(2) A(-4, 3, 2) を通る、方向ベクトル (1, 1, -1) の直線.

実数 t に対して、直線上の点 P を表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + t(1, 1, -1) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (-4, 3, 2) + t(1, 1, -1) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (t - 4, t + 3, 2 - t)\end{aligned}$$

(3) A(1, 1, 1), B(1, 0, -1) のときの直線 AB.

実数 t に対して、直線上の点 P を表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (1-t)(1, 1, 1) + t(1, 0, -1) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (1, 1-t, 1-2t)\end{aligned}$$

(4) ある実数 s を用いて、ベクトル方程式 $\vec{OQ} = (s+1, 2s, 2-s)$ で表される直線と平行で、A(1, -2, 3) を通る直線.

$\vec{OQ} = (1, 0, 2) + s(1, 2, -1)$
であるから、方向ベクトルは (1, 2, -1) .
この直線と平行な直線は方向ベクトルが一致するから、
実数 t に対して、求める直線上の点 P を表すベクトル方程式は、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + t(1, 2, -1) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (1, -2, 3) + t(1, 2, -1) \\ \Leftrightarrow \vec{p} &= (t + 1, 2t - 2, 3 - t)\end{aligned}$$