

反射テスト 数列 証明 数学的帰納法 02

1. 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $5^n - 2^n$ が 3 の倍数であることを証明せよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

2. 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $7^n - 3^n$ が 4 の倍数であることを証明せよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

反射テスト 数列 証明 数学的帰納法 02 解答解説

1. 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $5^n - 2^n$ が 3 の倍数であることを証明せよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

★ 数学的帰納法 (*mathematical induction*)

自然数に関する命題 $P(n)$ が全ての n に対して成り立っている事を証明する方法.

- ① $P(1)$ が成り立つ事を示す.
- ② 任意の自然数 k に対して, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つ事を示す.

以上から任意の自然数 n について $P(n)$ が成り立つ事を結論づける.

証明

$f(n) = 5^n - 2^n$ とする.

① $f(1) = 5 - 2 = 3$.

これは 3 の倍数である.

- ② $f(k)$ が 3 の倍数であると仮定する. 自然数 m を用いて, $f(k) = 3m$ とでき,
 $5^k - 2^k = 3m \Leftrightarrow 5^k = 2^k + 3m$

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 5^{k+1} - 2^{k+1} \\ &= 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 5(2^k + 3m) - 2 \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot 2^k + 15m \\ &= 3(2^k + 5m) \end{aligned}$$

$2^k + 5m$ は自然数であるから, $n = k$ のとき $f(k)$ が 3 の倍数であれば, $f(k+1)$ も 3 の倍数である.

- ①, ② から数学的帰納法により, $n = 1, 2, 3, \dots$ において $f(n)$ は 3 の倍数である.

2. 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $7^n - 3^n$ が 4 の倍数であることを証明せよ. (S 級 2 分 45 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分)

証明

$f(n) = 7^n - 3^n$ とする.

① $f(1) = 7 - 3 = 4$.

これは 4 の倍数である.

② $f(k)$ が 4 の倍数であると仮定する. 自然数 m を用いて, $f(k) = 4m$ とでき,

$$7^k - 3^k = 4m \quad \Leftrightarrow \quad 7^k = 3^k + 4m$$

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 7^{k+1} - 3^{k+1} \\ &= 7 \cdot 7^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 7(3^k + 4m) - 3 \cdot 3^k \\ &= 4 \cdot 3^k + 28m \\ &= 4(3^k + 7m) \end{aligned}$$

$3^k + 7m$ は自然数であるから, $n = k$ のとき $f(k)$ が 4 の倍数であれば, $f(k+1)$ も 4 の倍数である.

①, ② から数学的帰納法により, $n = 1, 2, 3, \dots$ において $f(n)$ は 4 の倍数である.