反射テスト　数列　逆算　数列の和から一般項　02

1.　一般項 a_n を求めよ．ただし S_n は第 1 項から第 n 項までの和とする．（ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 6 分 ）

（1）　$S_n = n^3 - n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

（2）　$S_n = n^3 - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

2. 一般項 a_n を求めよ．ただし S_n は第 1 項から第 n 項までの和とする．(S 級 3 分, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 8 分)

(1) $S_n = n^4 - n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $S_n = (n-1)(n+1)(n+2) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

反射テスト　数列　逆算　数列の和から一般項　02　解答解説

1.　一般項 a_n を求めよ．ただし S_n は第 1 項から第 n 項までの和とする．（ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 6 分 ）

★ 一般項 a_n ，第 n 項までの和 S_n とすれば，　$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$　**ただし $\boldsymbol{n = 2, 3, 4, \cdots}$**

$n=1$ をこの式に代入すると, $a_1 = S_1 - S_0$ となるが, S_0 は定義されてないので不適当．題意から, $a_1 = S_1$ とする．

(1)　$S_n = n^3 - n$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n=1$ のとき, $a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

$n = 2, 3, 4, \cdots$ のとき,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^3 - n - \left\{(n-1)^3 - (n-1)\right\} \\
&= n^3 - n - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (n-1) \\
&= n^3 - n - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 + n - 1 \\
&= 3n^2 - 3n
\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも満たすので,

$$\boldsymbol{a_n = 3n^2 - 3n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

☆見直し
$S_1 = 1^3 - 1 = 0$
　$a_1 = 3 \times 1^2 - 3 \times 1 = 0$　O.K.
$S_2 = 2^3 - 2 = 6$
　$a_2 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 = 6$
　$a_1 + a_2 = 0 + 6 = 6$　O.K.

(2)　$S_n = n^3 - 1$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n=1$ のとき, $a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

$n = 2, 3, 4, \cdots$ のとき,

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (n^3 - 1) - \left\{(n-1)^3 - 1\right\} \\
&= n^3 - 1 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - 1) \\
&= 3n^2 - 3n + 1
\end{aligned}$$

これは $n=1$ を満たさないので,

$$\begin{cases} \boldsymbol{n = 1} & \text{のとき,} \quad \boldsymbol{a_1 = 0} \\ \boldsymbol{n = 2, 3, 4, \cdots} & \text{のとき,} \quad \boldsymbol{a_n = 3n^2 - 3n + 1} \end{cases}$$

☆見直し
$S_2 = 2^3 - 1 = 7$
　$a_2 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 7$
　$a_1 + a_2 = 0 + 7 = 7$　O.K.

2. 一般項 a_n を求めよ．ただし S_n は第 1 項から第 n 項までの和とする．(S 級 3 分，A 級 4 分 30 秒，B 級 6 分，C 級 8 分)

(1) $S_n = n^4 - n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 1^4 - 1^2 = 0$

$n = 2, 3, 4, \cdots$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^4 - n^2 - \left\{(n-1)^4 - (n-1)^2\right\} \\ &= n^4 - n^2 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) \\ &\qquad + (n^2 - 2n + 1) \\ &= n^4 - n^2 - n^4 + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 \\ &\qquad + n^2 - 2n + 1 \\ &= 4n^3 - 6n^2 + 2n \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも満たすので，

$$\boldsymbol{a_n = 4n^3 - 6n^2 + 2n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

☆見直し
$S_1 = 1^4 - 1^2 = 0$
$a_1 = 4 \times 1^3 - 6 \times 1^2 + 2 \times 1 = 0$ O.K.
$S_2 = 2^4 - 2^2 = 12$
$a_2 = 4 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 2 \times 2 = 12$
$a_1 + a_2 = 0 + 12 = 12$ O.K.

☆計算のコツ
$n - (n-1) = 1$
$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$
$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$
$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$
これらの計算を先にすると早く正確に作業できるだろう．

(2) $S_n = (n-1)(n+1)(n+2) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = (1-1)(1+1)(1+2) = 0$

$n = 2, 3, 4, \cdots$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n-1)(n+1)(n+2) - (n-2)n(n+1) \\ &= n^3 + 2n^2 - n - 2 - (n^3 - n^2 - 2n) \\ &= 3n^2 + n - 2 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ を満たさないので，

$$\boldsymbol{\begin{cases} n = 1 & \text{のとき，} \quad a_1 = 0 \\ n = 2, 3, 4, \cdots & \text{のとき，} \quad a_n = 3n^2 + n - 2 \end{cases}}$$

☆見直し
$S_2 = (2-1)(2+1)(2+2) = 12$
$a_2 = 3 \times 4 = 12$
$a_1 + a_2 = 0 + 4 = 4$ O.K.