

反射テスト 三角関数 公式証明 オイラーの不等式 01

1. $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ a, b, c , $\triangle ABC$ の面積を S , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 次の式が成り立つことを示せ. (S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

(1) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

(2) $S = Rr (\sin A + \sin B + \sin C)$

(3) $\frac{r}{R} = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$

2. $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ a, b, c , $\triangle ABC$ の面積を S , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 次の式が成り立つことを示せ. 前ページの等式は証明なしにつかってよい. (S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 14 分)

$$(1) \quad \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(2) \quad \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$(3) \quad \frac{r}{R} = 2 \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

反射テスト 三角関数 公式証明 オイラーの不等式 01 解答解説

1. $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ a, b, c , $\triangle ABC$ の面積を S , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 次の式が成り立つことを示せ. (S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$(1) \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

正弦定理から, $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

この等式から, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

これらを三角形の面積の公式に代入して,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C \cdot \sin A \\ &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

$$(2) \quad S = Rr (\sin A + \sin B + \sin C)$$

正弦定理から, $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

この等式から, $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

これらを三角形の面積の公式に代入して,

$$\begin{aligned} S &= \frac{(a+b+c)r}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot r (2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C) \\ &= Rr (\sin A + \sin B + \sin C) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{r}{R} = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

(1),(2) から, S を消去する. $R > 0$ かつ $0 < A, B, C < \pi$ より, $\sin A, \sin B, \sin C$ は正であるから,

$$Rr (\sin A + \sin B + \sin C) = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

2. $\triangle ABC$ の 3 辺 BC, CA, AB をそれぞれ a, b, c , $\triangle ABC$ の面積を S , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 次の式が成り立つことを示せ. 前ページの等式は証明なしにつかってもよい. (S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 14 分)

$$(1) \quad \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{左辺} = \sin A + \sin B + \sin \{\pi - (A + B)\} \quad \because \text{三角形の内角の和は } 180^\circ \text{ より, } A + B + C = \pi$$

$$= \sin A + \sin B + \sin (A + B)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \sin A (1 + \cos B) + \sin B (1 + \cos A)$$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{A}{2} \quad \because \text{倍角公式} \begin{cases} \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \\ \cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2} - 1 \end{cases}$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right)$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) \quad \because \text{加法定理の逆}$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \quad \because \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$(2) \quad \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

1(3) に 2(1) を代入して,

$$\frac{r}{R} = \frac{2 \sin A \sin B \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad \because \text{倍角公式}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$(3) \quad \frac{r}{R} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$= 4 \left[-\frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) - \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2} \right) \right\} \right] \cdot \sin \frac{C}{2} \quad \because \text{積和公式}$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

★ オイラーの不等式 (*Euler's inequality*) 「 $R \geq 2r$ 」 初等幾何による証明は [こちら](#) を参照.

$$\frac{r}{R} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\leq 2 \sin \frac{C}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \quad \because -\frac{\pi}{2} < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ から } 0 < \cos \frac{A+B}{2} \leq 1, \text{ かつ } \sin \frac{C}{2} > 0$$

$$\leq -2 \left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore R \geq 2r$$

等号条件は, $\cos \frac{A+B}{2} = 1$ かつ $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ のとき. つまり, $\triangle ABC$ が正三角形のときである.