

反射テスト 統計 標本平均 01

1. 1,2,3 の数字が書かれているカードがそれぞれ 6 枚, 3 枚, 1 枚ある. これを母集団とし, カードの数字を変数 X とする.
(S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 6 分)
- (1) 母集団の確率分布表をつくり, 母平均 m , 母標準偏差 σ を求めよ.
- (2) この母集団から 1 枚引いてカードの数字を調べてから母集団に戻す試行について考える. n 回目に引いた数字を x_n とする. 標本平均を $\overline{X}_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ とする. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = 1$ のときの, $\overline{X}_5$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X}_5)$ を求めよ.
- (3) (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ の期待値 $E(\overline{X}_n)$ を求めよ.
- (4) (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X}_n)$ を 0.02 以下にする最小の n を求めよ.

2. 1,2,3,4 の数字が書かれているカードがそれぞれ 4 枚, 3 枚, 2 枚, 1 枚ある. これを母集団とし, カードの数字を変数 X とする.
(S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 6 分)

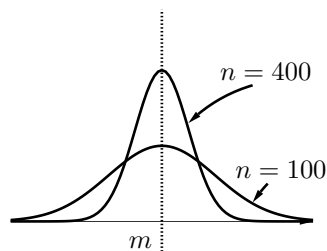
(1) 母集団の確率分布表をつくり, 母平均 m , 母標準偏差 σ を求めよ.

(2) この母集団から 1 枚引いてカードの数字を調べてから母集団に戻す試行について考える. n 回目に引いた数字を x_n とする. 標本平均を $\overline{X}_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ とする. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = 2$ のときの, $\overline{X}_5$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X}_5)$ を求めよ.

(3) (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ の期待値 $E(\overline{X}_n)$ を求めよ.

(4) (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X}_n)$ を 0.03 以下にする最小の n を求めよ.

反射テスト 統計 標本平均 01 解答解説



★ 標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき, 標本平均を $\bar{X}$ とすると,

$$\text{期待値 } E(\bar{X}) = m \quad , \quad \text{標準偏差 } \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

標本平均 $\bar{X}$ は, n が大きいとき, 近似的に 正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

n が大きくなれば, 標準偏差は小さくなり (左図参照), 0 に近づいていく.

$\bar{X}$ は母平均 m の近くに限りなく集中し, $\bar{X}$ が m に近い値をとる確率が 1 に近づく.

1. 1,2,3 の数字が書かれているカードがそれぞれ 6 枚, 3 枚, 1 枚ある. これを母集団とし, カードの数字を変数 X とする.
(S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 6 分)

- (1) 母集団の確率分布表をつくり, 母平均 m , 母標準偏差 σ を求めよ.

X	1	2	3	和
P	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$m = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{15}{10} = \mathbf{1.5}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{27}{10} = 2.7$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 2.7 - 1.5^2 = 0.45 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{0.45} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

- (2) この母集団から 1 枚引いてカードの数字を調べてから母集団に戻す試行について考える. n 回目に引いた数字を x_n とする. 標本平均を $\bar{X}_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ とする. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 1$ のときの, $\bar{X}_5$ と標準偏差 $\sigma(\bar{X}_5)$ を求めよ.

$$\bar{X}_5 = \frac{1+2+1+3+1}{5} = \mathbf{1.6}$$

$$E(\bar{X}_5^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2}{5} = 3.2$$

$$\begin{aligned} \{\sigma(\bar{X}_5)\}^2 &= E(\bar{X}_5^2) - (\bar{X}_5)^2 \\ &= 3.2 - 1.6^2 = 0.64 \end{aligned}$$

$$\sigma(\bar{X}_5) = \sqrt{0.64} = \mathbf{0.8}$$

- (3) (2) の標本平均 $\bar{X}_n$ の期待値 $E(\bar{X}_n)$ を求めよ.

標本平均の期待値は母集団平均に等しいので, $\mathbf{1.5}$.

- (4) (2) の標本平均 $\bar{X}_n$ の標準偏差 $\sigma(\bar{X}_n)$ を 0.02 以下にする最小の n を求めよ.

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ と題意から,}$$

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{10}}{\sqrt{n}} \leq 0.02 \Leftrightarrow n \geq 1125 \quad \text{よって, } \mathbf{n = 1125}$$

2. 1,2,3,4 の数字が書かれているカードがそれぞれ 4 枚, 3 枚, 2 枚, 1 枚ある. これを母集団とし, カードの数字を変数 X とする.
(S 級 3 分, A 級 4 分, B 級 5 分, C 級 6 分)

- (1) 母集団の確率分布表をつくり, 母平均 m , 母標準偏差 σ を求めよ.

X	1	2	3	4	和
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$m = 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{20}{10} = \mathbf{2}$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{2}{10} + 4^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 5 - 2^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

- (2) この母集団から 1 枚引いてカードの数字を調べてから母集団に戻す試行について考える. n 回目に引いた数字を x_n とする. 標本平均を $\overline{X}_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ とする. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = 2$ のときの, $\overline{X}_5$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X}_5)$ を求めよ.

$$\overline{X}_5 = \frac{1 + 1 + 1 + 3 + 2}{5} = \mathbf{1.6}$$

$$E(\overline{X}_5^2) = \frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2}{5} = 3.2$$

$$\begin{aligned}\{\sigma(\overline{X}_5)\}^2 &= E(\overline{X}_5^2) - (\overline{X}_5)^2 \\ &= 3.2 - 1.6^2 \\ &= 0.64\end{aligned}$$

$$\sigma(\overline{X}_5) = \sqrt{0.64} = \mathbf{0.8}$$

☆無作為標本抽出のサンプルである.

- (3) (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ の期待値 $E(\overline{X}_n)$ を求めよ.

標本平均の期待値は母集団平均に等しいので, $\mathbf{2}$.

- (4) (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X}_n)$ を 0.03 以下にする最小の n を求めよ.

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ と題意から,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.03 \Leftrightarrow n \geq \frac{10000}{9}$$

よって, $\mathbf{n = 1112}$