

反射テスト 統計 二項分布と正規分布との関係 01

1. 確率変数 X が二項分布 $B\left(7200, \frac{1}{3}\right)$ に従うとき, 次の問を求めよ. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) n が大きいので, X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うと考えられる. m, σ を決定せよ.

(2) (1) で求めた X の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ を確率変数 Z の標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたい. Z を X の式で表せ.

(3) 下の簡易的な正規分布表を用いて, $P(2300 \leq X \leq 2400)$ を求めよ.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(0 \leq Z \leq u)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

2. 確率変数 X が二項分布 $B\left(240000, \frac{2}{5}\right)$ に従うとき、次の問を求めよ。(S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) n が大きいので, X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うと考えられる. m, σ を決定せよ.

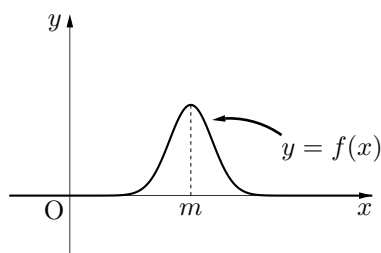
(2) (1) で求めた X の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ を確率変数 Z の標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたい. Z を X の式で表せ.

(3) 下の簡易的な正規分布表を用いて, $P(95640 \leq X \leq 96240)$ を求めよ.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(0 \leq Z \leq u)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

反射テスト 統計 二項分布と正規分布との関係 01 解答解説

1. 確率変数 X が二項分布 $B\left(7200, \frac{1}{3}\right)$ に従うとき、次の問を求めよ。(S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)



★ 正規分布 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m, \sigma \text{ は実数で, } \sigma \geq 0) \cdots e \text{ はネイピア定数で約 } 2.7$$

で与えられているとき、 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うといい、 $y = f(x)$ のグラフを正規分布曲線という。 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき、

$$\text{期待値 } E(X) = m, \text{ 標準偏差 } \sigma(X) = \sigma$$

★ 標準正規分布 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき、

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \text{ とおくと、確率変数 } Z \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

★ 正規分布表 標準正規分布の確率を求めるときは正規分布表を用いる。

標準正規分布 $N(0, 1)$ より、 $m = 0, \sigma = 1$ を用いて、 $\int_0^u f(x)dx = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ の近似値をまとめて一覧表にしたもの。

u の値から $P(0 \leq Z \leq u)$ の確率を求めることができる。 u が負のときは正規分布が線対称であることより、

$$P(-v \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq v) \text{ のように正の場合に移して考えること。}$$

★ 二項分布の正規近似

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、 n が大きくなればなるほど、 X は近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う。ただし、 $q = 1 - p$ 。

- (1) n が大きいので、 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うと考えられる。 m, σ を決定せよ。

$$\text{★ 二項分布 } B(n, p) \Rightarrow E(X) = np, \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\text{平均 } m = np = 7200 \times \frac{1}{3} = 2400$$

$$\text{標準偏差 } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{1600} = 40$$

☆ よって、 X は正規分布 $N(2400, 40^2) = N(2400, 1600)$ に従う。

- (2) (1) で求めた X の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ を確率変数 Z の標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたい。 Z を X の式で表せ。

$$\text{★ 正規分布の標準化 } Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

$$Z = \frac{X - 2400}{40}$$

- (3) 下の簡易的な正規分布表を用いて、 $P(2300 \leq X \leq 2400)$ を求めよ。

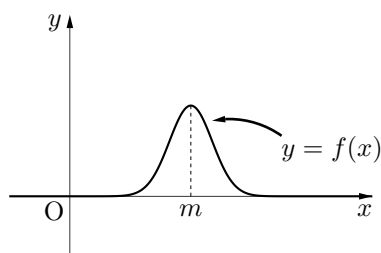
u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(0 \leq Z \leq u)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

$$(3) \text{ から } \begin{cases} X = 2300 \Rightarrow Z = \frac{2300 - 2400}{40} = -2.5 \\ X = 2400 \Rightarrow Z = \frac{2400 - 2400}{40} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore P(2300 \leq X \leq 2400) = P(-2.5 \leq Z \leq 0) \\ = P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$$

☆以上の考察から、成功確率 $p = \frac{1}{3}$ である反復試行を 7200 回 (X 回) くり返した場合、成功する回数が 2300 回以上 2400 回以下である確率はだいたい 0.4938 (49.38 %) であると言える。

2. 確率変数 X が二項分布 $B\left(240000, \frac{2}{5}\right)$ に従うとき、次の問を求めよ。(S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)



★ **正規分布** 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m, \sigma \text{ は実数で, } \sigma \geq 0) \cdots e \text{ はネイピア定数で約 } 2.7$$

で与えられているとき, X は **正規分布** $N(m, \sigma^2)$ に従うといい, $y = f(x)$ のグラフを **正規分布曲線** という. X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき,

$$\text{期待値 } E(X) = m, \text{ 標準偏差 } \sigma(X) = \sigma$$

★ **標準正規分布** X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき,

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \text{ とおくと, 確率変数 } Z \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う.}$$

★ **正規分布表** 標準正規分布の確率を求めるときは **正規分布表** を用いる.

標準正規分布 $N(0, 1)$ より, $m = 0, \sigma = 1$ を用いて, $\int_0^u f(x)dx = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ の近似値をまとめて一覧表にしたもの.

u の値から $P(0 \leq Z \leq u)$ の確率を求めることができる. u が負のときは正規分布が線対称であることより,

$$P(-v \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq v) \text{ のように正の場合に移して考えること.}$$

★ **二項分布の正規近似**

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき, n が大きくなればなるほど, X は近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う. ただし, $q = 1 - p$.

- (1) n が大きいので, X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うと考えられる. m, σ を決定せよ.

$$\star \text{ 二項分布 } B(n, p) \Rightarrow E(X) = np, \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\text{平均 } m = np = 240000 \times \frac{2}{5} = 96000$$

$$\text{標準偏差 } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{240000 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}} = \sqrt{57600} = 240$$

☆よって, X は正規分布 $N(96000, 240^2) = N(96000, 57600)$ に従う.

- (2) (1) で求めた X の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ を確率変数 Z の標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたい. Z を X の式で表せ.

$$\star \text{ 正規分布の標準化 } Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

$$Z = \frac{X - 96000}{240}$$

- (3) 下の簡易的な正規分布表を用いて, $P(95640 \leq X \leq 96240)$ を求めよ.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(0 \leq Z \leq u)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

$$(3) \text{ から } \begin{cases} X = 95640 \Rightarrow Z = \frac{95640 - 96000}{240} = -1.5 \\ X = 96240 \Rightarrow Z = \frac{96240 - 96000}{240} = 1 \end{cases}$$

(3) から

$$\begin{aligned} \therefore P(95640 \leq X \leq 96240) &= P(-1.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4332 + 0.3413 = 0.7745 \end{aligned}$$

☆以上の考察から, 成功確率 $p = \frac{2}{5}$ である反復試行を 240000 回 (X 回) くり返した場合, 成功する回数が 94640 回以上 96240 回以下である確率はだいたい 0.7745 (77.45 %) であると言える.