反射テスト　統計　正規分布とその標準化　01

1.　確率変数 X が正規分布 $N(50, 100)$ に従うとき，次の問を求めよ．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1)　期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2)　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，Z を X の式で表せ．

(3)　下の簡易的な正規分布表を用いて，$P(\,Z \geqq 1.0\,)$ を求めよ．

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

(4)　$P(\,X \geqq 60\,)$ を求めよ．

2. 確率変数 X が正規分布 $N(100, 625)$ に従うとき，次の問を求めよ．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

(1) 期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，Z を X の式で表せ．

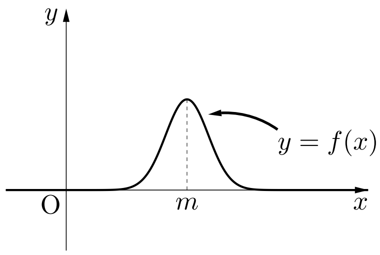
(3) 下の簡易的な正規分布表を用いて，$P(\,Z \geqq 2.0\,)$ を求めよ．

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

(4) $P(\,X \leqq 150\,)$ を求めよ．

反射テスト　統計　正規分布とその標準化　01　解答解説

1.　確率変数 X が正規分布 $N(50, 100)$ に従うとき，次の問を求めよ.（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分 ）



★ 正規分布　連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$　**（ $\boldsymbol{m, \sigma}$ は実数で，$\boldsymbol{\sigma \geqq 0}$ ）**$\cdots$ e はネイピア定数で約 2.7

で与えられているとき，X は **正規分布$\boldsymbol{N(m, \sigma^2)}$** に従うといい，$y = f(x)$ のグラフを **正規分布曲線** という. X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき，

期待値 $\boldsymbol{E(X) = m}$ ，標準偏差 $\boldsymbol{\sigma(X) = \sigma}$

★ 標準正規分布　X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき，

$\boldsymbol{Z = \dfrac{X - m}{\sigma}}$ とおくと，確率変数 Z は **標準正規分布 $\boldsymbol{N(0, 1)}$** に従う.

★ 正規分布表　標準正規分布の確率を求めるときは **正規分布表** を用いる.

標準正規分布 $N(0, 1)$ より，$m = 0$ ，$\sigma = 1$ を用いて，$\displaystyle\int_0^u f(x)dx = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ の近似値をまとめて一覧表にしたもの.

u の値から $P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$ の確率を求めることができる. u が負のときは正規分布が線対称であることより，

$P(\,-u \leqq Z \leqq u\,) = P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$　であることを利用する.

★ 二項分布の正規近似

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき，n が大きくなればなるほど，X は近似的に正規分布 $\boldsymbol{N(np, npq)}$ に従う. ただし，$q = 1 - p$.

(1)　期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

★ 正規分布　$\boldsymbol{N(m, \sigma^2)}$ $\cdots$ $\boldsymbol{m}$ は平均，$\boldsymbol{\sigma^2}$ は分散 (つまり$\boldsymbol{\sigma}$ は標準偏差)

$E(X) = m = \mathbf{50}$　　　　$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$

☆平均 50 点，標準偏差 10 点のイメージがこれ. 日本のテストで算出される偏差値はこの正規分布に従う.

(2)　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，Z を X の式で表せ.

★ 正規分布の標準化　$\boldsymbol{Z = \dfrac{X - m}{\sigma}}$

$\boldsymbol{Z = \dfrac{X - 50}{10}}$

(3)　下の簡易的な正規分布表を用いて，$P(\,Z \geqq 1.0\,)$ を求めよ.

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

正規分布表から $u = 1.0$ のときを調べると，$P(\,0 \leqq Z \leqq 1\,) = 0.3413$ とわかるので，

$P(\,Z \geqq 1\,) = P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1) = 0.5 - 0.3413 = \mathbf{0.1587}$

☆ $P(Z \geqq 0) = 0.5$　$\cdots$全事象の半分である.

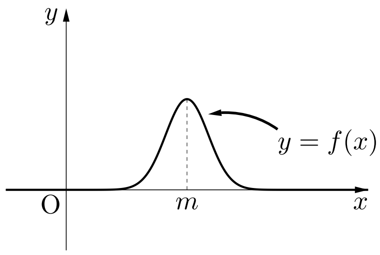
(4)　$P(\,X \geqq 60\,)$ を求めよ.

$Z = \dfrac{X - 50}{10}$　$\Leftrightarrow$　$X = 10Z + 50$

よって　$X \geqq 60$　$\Leftrightarrow$　$10Z + 50 \geqq 60$　$\Leftrightarrow$　$Z \geqq 1$

$P(\,X \geqq 60\,) = P(\,Z \geqq 1\,) = \mathbf{0.1587}$

2.　確率変数 X が正規分布 $N(100, 625)$ に従うとき，次の問を求めよ．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)



★ 正規分布　連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}$$ **(m, σ は実数で，$\sigma \geqq 0$)** $\cdots$ e はネイピア定数で約 2.7

で与えられているとき，X は **正規分布$N(m, \sigma^2)$** に従うといい，$y = f(x)$ のグラフを **正規分布曲線** という．X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき，

　期待値 $E(X) = m$ ，**標準偏差 $\sigma(X) = \sigma$**

★ 標準正規分布　X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき，

$\boldsymbol{Z = \dfrac{X - m}{\sigma}}$ とおくと，確率変数 Z は **標準正規分布 $N(0, 1)$** に従う．

★ 正規分布表　標準正規分布の確率を求めるときは **正規分布表** を用いる．

標準正規分布 $N(0, 1)$ より，$m = 0$ ，$\sigma = 1$ を用いて，$\displaystyle\int_0^u f(x)dx = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ の近似値をまとめて一覧表にしたもの．

u の値から $P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$ の確率を求めることができる．u が負のときは正規分布が線対称であることより，

　$P(\,-u \leqq Z \leqq u\,) = P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$　であることを利用する．

★ 二項分布の正規近似

X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき，n が大きくなればなるほど，X は近似的に正規分布 $\boldsymbol{N(np, npq)}$ に従う．ただし，$q = 1 - p$.

(1)　期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

★ 正規分布　$N(m, \sigma^2)$ $\cdots$ m は平均，σ^2 は分散 (つまりσ は標準偏差)

$E(X) = m = \mathbf{100}$　　　　$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{625} = \mathbf{25}$

(2)　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，Z を X の式で表せ．

★ 正規分布の標準化　$\boldsymbol{Z = \dfrac{X - m}{\sigma}}$

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - 100}{25}}$$

(3)　下の簡易的な正規分布表を用いて，$P(\,Z \geqq 2.0\,)$ を求めよ．

u	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$P(\,0 \leqq Z \leqq u\,)$	.0000	.1915	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987

正規分布表から $u = 2.0$ のときを調べると，$P(\,0 \leqq Z \leqq 2\,) = 0.4772$ とわかるので，

$P(\,Z \geqq 2\,) = P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 2) = 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228}$

☆ $P(Z \geqq 0) = 0.5$　$\cdots$全事象の半分である．

(4)　$P(\,X \leqq 150\,)$ を求めよ．

$Z = \dfrac{X - 100}{25}$　$\Leftrightarrow$　$X = 25Z + 100$

よって　$X \leqq 150$　$\Leftrightarrow$　$25Z + 100 \leqq 150$　$\Leftrightarrow$　$Z \leqq 2$

$P(\,X \leqq 150\,) = P(\,Z \leqq 2\,) = 1 - P(\,Z \geqq 2\,) = 1 - 0.0228 = \mathbf{0.9772}$