反射テスト　統計　確率密度関数　01

1.　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\dfrac{2}{9}x$ （$0 \leqq x \leqq 3$）で与えられているとき，次の確率を求めよ．

（S 級 40 秒，A 級 1 分，B 級 2 分，C 級 3 分）

(1)　$P(0 \leqq X \leqq 3)$

(2)　$P(1 \leqq X \leqq 2)$

2.　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=k(1-x)$ （$-3 \leqq x \leqq 1$）で与えられているとき，k の値を求めよ．

（S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 45 秒，C 級 5 分）

3. 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$ （$0 \leqq x \leqq 2$）で与えられているとき，次の確率を求めよ．

（S 級 40 秒，A 級 1 分，B 級 2 分，C 級 3 分）

(1) $P(\,0 \leqq X \leqq 2\,)$

(2) $P(\,0 \leqq X \leqq 1\,)$

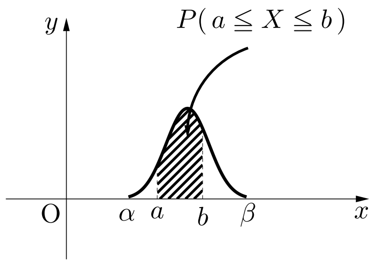
4. 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = k(4 - x^2)$ （$-2 \leqq x \leqq 2$）で与えられているとき，k の値を求めよ．

（S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 45 秒，C 級 5 分）

反射テスト　統計　確率密度関数　01　解答解説

1.　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\dfrac{2}{9}x$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ．

(S 級 40 秒，A 級 1 分，B 級 2 分，C 級 3 分)



★ 連続型確率変数と確率密度関数

$P(a \leqq X \leqq b)$ は，確率変数 X が a 以上 b 以下である確率を表す．

以下，**連続型確率変数** X の **確率密度関数 $f(x)$** $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ の性質．

1.　常に $f(x) \geqq 0$

2.　確率 $P(a \leqq X \leqq b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$　　☆左図の斜線部の面積が確率となる．

3.　$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$　　☆全面積が 1.

(1)　$P(0 \leqq X \leqq 3)$

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx &= \int_0^3 \frac{2}{9}xdx \\ &= \left[\frac{1}{9}x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{9}{9}-0 \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

☆「全面積は 1」と知っていれば計算の必要もない．

(2)　$P(1 \leqq X \leqq 2)$

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)dx &= \int_1^2 \frac{2}{9}xdx \\ &= \left[\frac{1}{9}x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{9}-\frac{1}{9} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

2.　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=k(1-x)$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$ で与えられているとき，k の値を求めよ．

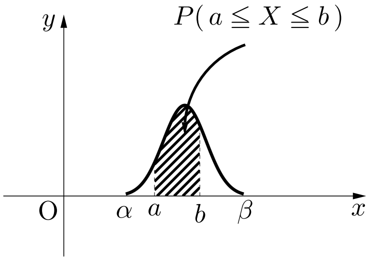
(S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 45 秒，C 級 5 分)

$$\begin{aligned}\int_{-3}^1 f(x)dx &= \int_{-3}^1 k(1-x)dx \\ &= k\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^1 \\ &= k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-3-\frac{9}{2}\right)\right\} \\ &= 8k\end{aligned}$$

全面積は 1 だから，　$8k=1$　⇔　$\boldsymbol{k=\frac{1}{8}}$

3. 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$ （$0 \leqq x \leqq 2$）で与えられているとき，次の確率を求めよ．

（S 級 40 秒，A 級 1 分 20 秒，B 級 3 分，C 級 5 分）



★ 連続型確率変数と確率密度関数

$P(a \leqq X \leqq b)$ は，確率変数 X が a 以上 b 以下である確率を表す．

以下，**連続型確率変数** X の **確率密度関数** $f(x)$（$\alpha \leqq x \leqq \beta$）の性質．

1. 常に $f(x) \geqq 0$
2. 確率 $P(a \leqq X \leqq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ☆左図の斜線部の面積が確率となる．
3. $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$ ☆全面積が 1．

(1) $P(0 \leqq X \leqq 2)$

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \left[x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^2 \\ &= (2-1) - (0-0) \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

☆「全面積は 1」と知っていれば計算の必要もない．

(2) $P(0 \leqq X \leqq 1)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \left[x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) - (0-0) \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

4. 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = k(4 - x^2)$（$-2 \leqq x \leqq 2$）で与えられているとき，k の値を求めよ．

（S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 45 秒，C 級 5 分）

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x)dx &= \int_{-2}^2 k\left(4 - x^2\right)dx \\ &= 2k\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= 2k\left\{\left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0-0)\right\} \\ &= \frac{32}{3}k\end{aligned}$$

全面積は 1 だから，$\dfrac{32}{3}k = 1 \iff \boldsymbol{k = \frac{3}{32}}$