

反射テスト 統計 二項分布 01

1. サイコロを n 回ふって 1 が出た回数を X とする. (S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1) $P(X = r)$ を n, r で表し, この二項分布 $B(n, p)$ の p を決定せよ.

(2) 平均 $E(X)$ を求めよ.

(3) 分散 $V(X)$ を求めよ.

(4) 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

2. 2人でジャンケンをして、引き分けの回数を X とする。(S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1) $P(X = r)$ を n, r で表し, この二項分布 $B(n, p)$ の p を決定せよ.

(2) 平均 $E(X)$ を求めよ.

(3) 分散 $V(X)$ を求めよ.

(4) 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

反射テスト 統計 二項分布 01 解答解説

1. サイコロを n 回ふって 1 が出た回数を X とする. (S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1) $P(X=r)$ を n, r で表し, この二項分布 $B(n, p)$ の p を決定せよ.

★ 二項分布 $B(n, p)$

1 回の試行で事象 A の起こる確率が p のとき, この試行を n 回行う反復試行において, A の起こる回数を X とすると, $X=r$ になる確率は $P(X=r) = {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$ ($r=0, 1, 2, \dots, n; 0 < p < 1$)
このとき, 確率変数 X は 二項分布 $B(n, p)$ に従うという.

$$\begin{aligned} P(X=r) &= {}_nC_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-r} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

☆ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ は ${}_nC_r$ でもかまわない.

(2) 平均 $E(X)$ を求めよ.

$$E(X) = n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}n$$

★ 二項分布の平均 $E(X) = np$

証明 確率変数 X_k を, k 回目の試行で A が起これば 1, 起こらなければ 0 の値とすれば, $P(X_k=1) = p$
よって, $E(X_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立しているから,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = np \end{aligned}$$

(3) 分散 $V(X)$ を求めよ.

$$V(X) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}n$$

★ 二項分布の分散 $V(X) = np(1-p)$

証明 確率変数 X_k を, k 回目の試行で A が起これば 1, 起こらなければ 0 の値とすれば, $P(X_k=1) = p$
よって, $E(X_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \Rightarrow V(X_k) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - \{E(X_k)\}^2 = p - p^2 = p(1-p)$

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立しているから,

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$

(4) 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{36}n} = \frac{\sqrt{5n}}{6}$$

★ 二項分布の標準偏差 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

2. 2人でジャンケンをして、引き分けの回数を X とする。(S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1) $P(X=r)$ を n, r で表し、この二項分布 $B(n, p)$ の p を決定せよ。

★ 二項分布 $B(n, p)$

1 回の試行で事象 A の起こる確率が p のとき、この試行を n 回行う反復試行において、 A の起こる回数を X とすると、 $X=r$ になる確率は $P(X=r) = {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$ ($r=0, 1, 2, \dots, n; 0 < p < 1$)

このとき、確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従うという。

2 人のジャンケンで引き分ける確率は $\frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} P(X=r) &= {}_nC_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-r} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{n-r} \Rightarrow p = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

☆ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ は ${}_nC_r$ でもかまわない。

(2) 平均 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n$$

★ 二項分布の平均 $E(X) = np$

証明 確率変数 X_k を、 k 回目の試行で A が起これば 1, 起こらなければ 0 の値とすれば、 $P(X_k=1) = p$

よって、 $E(X_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立しているから、

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = np \end{aligned}$$

(3) 分散 $V(X)$ を求めよ。

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}n$$

★ 二項分布の分散 $V(X) = np(1-p)$

証明 確率変数 X_k を、 k 回目の試行で A が起これば 1, 起こらなければ 0 の値とすれば、 $P(X_k=1) = p$

よって、 $E(X_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \Rightarrow V(X_k) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - \{E(X_k)\}^2 = p - p^2 = p(1-p)$

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立しているから、

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$

(4) 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}n} = \frac{\sqrt{2n}}{3}$$

★ 二項分布の標準偏差 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$