反射テスト　統計　確率変数の変換　01

1.　袋の中に赤玉 2 個, 青玉 2 個が入っている. この袋の中から同時に 2 個取り出すとき, 赤玉の個数を X とする.

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1)　期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

(2)　2 個取り出す行為に 1000 円, 加えて取り出した赤玉 1 個につき 300 円もらえるとする.
もらえる金額を Y 円としたとき, 期待値 $E(Y)$, 分散 $V(Y)$, 標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ.

2. 袋の中に赤玉 3 個, 青玉 2 個が入っている. この袋の中から同時に 2 個取り出すとき, 赤玉の個数を X とする.

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) 期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

(2) 2 個取り出す行為に 1000 円もらえるが, 取り出した赤玉 1 個につき 500 円引かれるとする.
もらえる金額を Y 円としたとき, 期待値 $E(Y)$, 分散 $V(Y)$, 標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ.

反射テスト　統計　確率変数の変換　01　解答解説

1.　袋の中に赤玉 2 個, 青玉 2 個が入っている. この袋の中から同時に 2 個取り出すとき, 赤玉の個数を X とする.

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ **期待値 (平均)**　$\boldsymbol{E(X)=\sum_{k=1}^{n}\{x_kP(X=x_k)\}=\sum_{k=1}^{n}(x_kp_k)}$

★ **分散 $\boldsymbol{V(X)}$**　以下, $E(X)=m$ とする.

$$\boldsymbol{V(X)=E\left((X-m)^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{(x_k-m)^2p_k\right\}} \quad \cdots\text{公式 1}$$

$$\boldsymbol{=E(X^2)-\{E(X)\}^2} \quad \cdots\text{公式 2}$$

★ **標準偏差 $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$**

★ **確率変数の変換公式** (独立・従属によらず成立)

$$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b} \qquad \boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)} \qquad \boldsymbol{\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)}$$

$$\boldsymbol{E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)}$$

★ **確率変数の独立性と変換公式**

X と Y が独立　$\Leftrightarrow$　$P_X(Y)=P(Y)$　$\Leftrightarrow$　$P_Y(X)=P(X)$　$\Leftrightarrow$　$P(X\cap Y)=P(X)\,P(Y)$

任意の X,Y について, $P(X=s\,,\,Y=t)=P(X=s)\,P(Y=t)$ が成り立つとき, X と Y が互いに独立であるという.

$P_X(Y)$ は事象 X が起こったとき事象 Y が起こる確率（★条件付き確率）である.

$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ が互いに独立ならば, $\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)}$

$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ が互いに独立ならば, $\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ が互いに独立ならば, $\boldsymbol{V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)}$　(☆ b の値によらない)

(1)　期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

$$\begin{cases} P(X=0)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6} \\ P(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{6} \\ P(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \text{☆確かめ 和が 1 になるので } O.K.$$

$$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{4}{6}+2\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{4+2}{6}=\mathbf{1}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \qquad \leftarrow\text{★ 分散 の公式 2}$$
$$=\left(0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{4}{6}+2^2\times\frac{1}{6}\right)-1^2$$
$$=\left(0+\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\right)-1=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(2)　2 個取り出す行為に 1000 円, 加えて取り出した赤玉 1 個につき 300 円もらえるとする.
もらえる金額を Y 円としたとき, 期待値 $E(Y)$, 分散 $V(Y)$, 標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ.

★変換公式を用いる.　$Y=300X+1000$

$$E(Y)=E(300X+1000)=300E(X)+1000=300\times1+1000=\mathbf{1300}$$

$$V(Y)=V(300X+1000)=300^2V(X)=90000\times\frac{1}{3}=\mathbf{30000}$$

$$\sigma(Y)=\sigma\,(300X+1000)=|\,300\,|\,\sigma(X)=300\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{100\sqrt{3}}$$

2. 袋の中に赤玉 3 個, 青玉 2 個が入っている. この袋の中から同時に 2 個取り出すとき, 赤玉の個数を X とする.

(S 級 2 分, A 級 3 分 40 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1) 期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ.

$$\begin{cases} P(X=0) = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{10} \\ P(X=1) = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{6}{10} \\ P(X=2) = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

☆確かめ 和が 1 になるので $O.K.$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{6+6}{10} = \mathbf{\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$ ←★ **分散** の公式 2

$$\begin{aligned} &= \left(0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10}\right) - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \\ &= \left(0 + \frac{6}{10} + \frac{12}{10}\right) - \frac{36}{25} = \mathbf{\frac{9}{25}} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

(2) 2 個取り出す行為に 1000 円もらえるが, 取り出した赤玉 1 個につき 500 円引かれるとする.
もらえる金額を Y 円としたとき, 期待値 $E(Y)$, 分散 $V(Y)$, 標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ.

★変換公式を用いる. $Y = 1000 - 500X$

$$E(Y) = E(1000 - 500X) = 300E(X) + 1000 = 1000 - 500 \times \frac{6}{5} = \mathbf{400}$$

$$V(Y) = V(1000 - 500X) = 500^2 V(X) = 250000 \times \frac{9}{25} = \mathbf{90000}$$

$$\sigma(Y) = \sigma(1000 - 500X) = |-500|\,\sigma(X) = 500 \times \frac{3}{5} = \mathbf{300}$$