

反射テスト 統計 確率変数の独立性 01

1. サイコロを2回ふって、偶数の目が出た回数を X 、3の倍数の目が出た回数を Y とする。このとき、以下の表をうめて、確率変数 X と Y が互いに独立しているかどうか調べよ。独立であれば「I」、従属であれば「D」を記せ。
(S 級 4 分 30 秒, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分)

表1 確率変数 X についての確率分布表.

X	0	1	2	和
$P(X)$				

表2 確率変数 Y についての確率分布表.

Y	0	1	2	和
$P(Y)$				

表3 表1と表2から確率の積 $P(X) \times P(Y)$ を求めたもの.

	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$
$P(X=0)$			
$P(X=1)$			
$P(X=2)$			

表4 $P(X, Y)$ を調べるため、たてに1回目のサイコロの目①、よこに2回目のサイコロの目②をとり、 X, Y を調べたもの.

② ①	1	2	3	4	5	6
1	$X=0, Y=0$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$
2	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$
3	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$
4	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$
5	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$
6	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$	$X=, Y=$

表5 表4から $P(X, Y)$ を調べた。例えば $(X=0, Y=0)$ は表4から4通りあるから、 $\frac{4}{36}$ 。

Y X	0	1	2
0	$\frac{4}{36}$		
1			
2			

2. サイコロを2回ふって、偶数の目が出なかった回数を X 、3の倍数の目が出なかった回数を Y とする。このとき、以下の表をうめて、確率変数 X と Y が互いに独立しているかどうか調べよ。独立であれば「I」、従属であれば「D」を記せ。
(S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 12 分, C 級 18 分)

表 1 確率変数 X についての確率分布表.

X	0	1	2	和
$P(X)$				

表 2 確率変数 Y についての確率分布表.

Y	0	1	2	和
$P(Y)$				

表 3 表 1 と表 2 から確率の積 $P(X) \times P(Y)$ を求めたもの.

	$P(Y = 0)$	$P(Y = 1)$	$P(Y = 2)$
$P(X = 0)$			
$P(X = 1)$			
$P(X = 2)$			

表 4 $P(X, Y)$ を調べるため、たてに 1 回目のサイコロの目①、よこに 2 回目のサイコロの目②をとり、 X, Y を調べたもの.

② ①	1	2	3	4	5	6
1	$X = 2, Y = 2$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$
2	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$
3	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$
4	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$
5	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$
6	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$	$X = \quad, Y = \quad$

表 5 表 4 から $P(X, Y)$ を調べた。例えば $(X = 0, Y = 0)$ は表 4 から 1 通りあるから、 $\frac{1}{36}$ 。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{36}$		
1			
2			

反射テスト 統計 確率変数の独立性 01 解答解説

1. サイコロを2回ふって、偶数の目が出た回数を X 、3の倍数の目が出た回数を Y とする。このとき、以下の表をうめて、確率変数 X と Y が互いに独立しているかどうか調べよ。独立であれば「I」、従属であれば「D」を記せ。

(S級4分30秒, A級7分, B級10分, C級15分)

★ 確率変数の独立性

$$X \text{ と } Y \text{ が独立} \Leftrightarrow P_X(Y) = P(Y) \Leftrightarrow P_Y(X) = P(X) \Leftrightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$$

任意の X, Y について、 $P(X=s, Y=t) = P(X=s)P(Y=t)$ が成り立つとき、 X と Y が互いに独立であるという。

$P_X(Y)$ は事象 X が起こったとき事象 Y が起こる確率 (★条件付き確率) である。

解答

★ 統計は表

表1 確率変数 X についての確率分布表。 ←実は★二項分布である。

X	0	1	2	和
$P(X)$	${}_2C_0 \left(\frac{3}{6}\right)^0 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$	${}_2C_1 \left(\frac{3}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^1 = \frac{2}{4}$	${}_2C_2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^0 = \frac{1}{4}$	1

表2 確率変数 Y についての確率分布表。 ←実はこれも★二項分布である。

Y	0	1	2	和
$P(Y)$	${}_2C_0 \left(\frac{2}{6}\right)^0 \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$	${}_2C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^1 = \frac{4}{9}$	${}_2C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^0 = \frac{1}{9}$	1

表3 表1と表2から確率の積 $P(X) \times P(Y)$ を求めたもの。

	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$
$P(X=0)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X=1)$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$
$P(X=2)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

表4 $P(X, Y)$ を調べるため、たてに1回目のサイコロの目①、よこに2回目のサイコロの目②をとり、 X, Y を調べたもの。

② \ ①	1	2	3	4	5	6
1	$X=0, Y=0$	$X=1, Y=0$	$X=0, Y=1$	$X=1, Y=0$	$X=0, Y=0$	$X=1, Y=1$
2	$X=1, Y=0$	$X=2, Y=0$	$X=1, Y=1$	$X=2, Y=0$	$X=1, Y=0$	$X=2, Y=1$
3	$X=0, Y=1$	$X=1, Y=1$	$X=0, Y=2$	$X=1, Y=1$	$X=0, Y=1$	$X=1, Y=2$
4	$X=1, Y=0$	$X=2, Y=0$	$X=1, Y=1$	$X=2, Y=0$	$X=1, Y=0$	$X=2, Y=1$
5	$X=0, Y=0$	$X=1, Y=0$	$X=0, Y=1$	$X=1, Y=0$	$X=0, Y=0$	$X=1, Y=1$
6	$X=1, Y=1$	$X=2, Y=1$	$X=1, Y=2$	$X=2, Y=1$	$X=1, Y=1$	$X=2, Y=2$

表5 表4から $P(X, Y)$ を調べた。例えば $(X=0, Y=0)$ は表4から4通りあるから、 $\frac{4}{36}$ 。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

⇒ 表3と表5が一致するので、独立 I

☆計算や比較を楽にするため、約分していない箇所があるが、もちろん約分してあってもよい。

☆一見従属っぽいけど、独立である。「2の倍数であるかどうか」と「3の倍数であるかどうか」はこの場合無関係だといえよう。

2. サイコロを2回ふって、偶数の目が出なかった回数を X 、3の倍数の目が出なかった回数を Y とする。このとき、以下の表をうめて、確率変数 X と Y が互いに独立しているかどうか調べよ。独立であれば「I」、従属であれば「D」を記せ。

(S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 12 分, C 級 18 分)

★ 確率変数の独立性

X と Y が独立 $\Leftrightarrow P_X(Y) = P(Y) \Leftrightarrow P_Y(X) = P(X) \Leftrightarrow P(X \cap Y) = P(X) P(Y)$
 任意の X, Y について、 $P(X = s, Y = t) = P(X = s) P(Y = t)$ が成り立つとき、 X と Y が互いに独立であるという。
 $P_X(Y)$ は事象 X が起こったとき事象 Y が起こる確率 (★条件付き確率) である。

解答

★ 統計は表

表 1 確率変数 X についての確率分布表. ←★二項分布.

X	0	1	2	和
$P(X)$	${}_2C_0 \left(\frac{3}{6}\right)^0 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$	${}_2C_1 \left(\frac{3}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^1 = \frac{2}{4}$	${}_2C_2 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^0 = \frac{1}{4}$	1

表 2 確率変数 Y についての確率分布表. ←これも★二項分布.

Y	0	1	2	和
$P(Y)$	${}_2C_0 \left(\frac{4}{6}\right)^0 \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$	${}_2C_1 \left(\frac{4}{6}\right)^1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 = \frac{4}{9}$	${}_2C_2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^0 = \frac{4}{9}$	1

表 3 表 1 と表 2 から確率の積 $P(X) \times P(Y)$ を求めたもの.

	$P(Y = 0)$	$P(Y = 1)$	$P(Y = 2)$
$P(X = 0)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$
$P(X = 1)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$
$P(X = 2)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$

表 4 $P(X, Y)$ を調べるため、たてに 1 回目のサイコロの目①, よこに 2 回目のサイコロの目②をとり、 X, Y を調べたもの.

② ①	1	2	3	4	5	6
1	$X = 2, Y = 2$	$X = 1, Y = 2$	$X = 2, Y = 1$	$X = 1, Y = 2$	$X = 2, Y = 2$	$X = 1, Y = 1$
2	$X = 1, Y = 2$	$X = 0, Y = 2$	$X = 1, Y = 1$	$X = 0, Y = 2$	$X = 1, Y = 2$	$X = 0, Y = 1$
3	$X = 2, Y = 1$	$X = 1, Y = 1$	$X = 2, Y = 0$	$X = 1, Y = 1$	$X = 2, Y = 1$	$X = 1, Y = 0$
4	$X = 1, Y = 2$	$X = 0, Y = 2$	$X = 1, Y = 1$	$X = 0, Y = 2$	$X = 1, Y = 2$	$X = 0, Y = 1$
5	$X = 2, Y = 2$	$X = 1, Y = 2$	$X = 2, Y = 1$	$X = 1, Y = 2$	$X = 2, Y = 2$	$X = 1, Y = 1$
6	$X = 1, Y = 1$	$X = 0, Y = 1$	$X = 1, Y = 0$	$X = 0, Y = 1$	$X = 1, Y = 1$	$X = 0, Y = 0$

表 5 表 4 から $P(X, Y)$ を調べた. 例えば $(X = 0, Y = 0)$ は表 4 から 1 通りあるから, $\frac{1}{36}$.

Y X	0	1	2
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$

$\Rightarrow$ 表 3 と表 5 が一致するので, 独立 I

☆計算や比較を楽にするため、約分していない箇所があるが、もちろん約分してあってもよい。
 ☆前問の余事象について考える問題. 一般的に以下のことがいえる. $\overline{X}$ は X の余事象 (補集合).
 A と B が独立 $\Leftrightarrow A$ と $\overline{B}$ が独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ と $\overline{B}$ が独立.