反射テスト　統計　分散と標準偏差　01

1.　4 人掛けの椅子がある．ここに 2 人の人が座ったとき，その 2 人の間に座ることができる人数を X とする．

(S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分)

(1)　以下の確率分布表をうめよ．

X	0	1	2	計
P				

(2)　X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ．

(3)　X の分散 $V(X)$ を求めよ．

(4)　X の標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

2. 5 人掛けの椅子がある．ここに 2 人の人が座ったとき，その 2 人の間に座ることができる人数を X とする．

（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）

(1) 以下の確率分布表をうめよ．

X	0	1	2	3	計
P					

(2) X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ．

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ．

(4) X の標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

反射テスト　統計　分散と標準偏差　01　解答解説

1.　4 人掛けの椅子がある．ここに 2 人の人が座ったとき，その 2 人の間に座ることができる人数を X とする．

（S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分）

(1)　以下の確率分布表をうめよ．

全部で，${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り．

$X = 0$ になる場合は ○○×× 　×○○× 　××○○ $\Rightarrow$ $P(X = 0) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$X = 2$ になる場合は ○××○ $\Rightarrow$ $P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$

よって，$X = 1$ になる場合は $1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{3}$

X	0	1	2	計
P	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{6}}$	**1**

★ 確率変数と確率分布表

P の行は各 X の値が起こる確率．

（★全事象の確率の総和は 1.）

(2)　X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ．

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

★ 期待値 (平均)

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{k=1}^{n} \{x_k P(X = x_k)\} = \sum_{k=1}^{n} (x_k p_k)}$$

(3)　X の分散 $V(X)$ を求めよ．

☆下の **分散** の公式 2 を用いる．

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \left(0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{9} = \boldsymbol{\frac{5}{9}} \end{aligned}$$

★ 分散 $\boldsymbol{V(X)}$　以下，$E(X) = m$ とする．

$$\boldsymbol{V(X) = E\left((X - m)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\{(x_k - m)^2 p_k\right\}} \quad \text{公式 1}$$

$$\boldsymbol{= E(X^2) - \{E(X)\}^2} \quad \text{公式 2}$$

(4)　X の標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

★ 標準偏差 $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

分散 $V(X)$ は X の単位の 2 乗なので，その正の平方根 $\sigma(X)$ をとることによって，X の単位に合わせたものが標準偏差．
標準偏差を考えることにより，X やその偏差などと標準偏差の加減乗除に意味がでてくる．

2. 5 人掛けの椅子がある．ここに 2 人の人が座ったとき，その 2 人の間に座ることができる人数を X とする．

（ S 級 1 分 10 秒，A 級 2 分 30 秒，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）

(1) 以下の確率分布表をうめよ．

全部で，${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り．

$X = 0$ になる場合は ○○××× ×○○×× ××○○× ×××○○ $\Rightarrow$ $P(X = 0) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

$X = 3$ になる場合は ○×××○ $\Rightarrow$ $P(X = 3) = \dfrac{1}{10}$

$X = 2$ になる場合は ○××○× ×○××○ $\Rightarrow$ $P(X = 2) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

よって，$X = 1$ になる場合は $1 - \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{3}{10}$

X	0	1	2	3	計
P	$\mathbf{\frac{2}{5}}$	$\mathbf{\frac{3}{10}}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\mathbf{\frac{1}{10}}$	**1**

★ 確率変数と確率分布表
P の行は各 X の値が起こる確率.
(★全事象の確率の総和は 1.)

☆別解（補足） 1(1) で確率 $\dfrac{3}{6}$, $\dfrac{2}{6}$, $\dfrac{1}{6}$ の規則性に気づけば，
この問 2(1) の確率が順に，$\dfrac{4}{10}$, $\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{2}{10}$, $\dfrac{1}{10}$ となることも瞬時にわかるだろう．

(2) X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{10} \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

★ 期待値 (平均) $\displaystyle \boldsymbol{E(X) = \sum_{k=1}^{n} \{x_k P(X = x_k)\} = \sum_{k=1}^{n} (x_k p_k)}$

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ．

☆下の **分散** の公式 2 を用いる．

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \left(0^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{10}\right) - 1^2 \\ &= \left(0 + \frac{3}{10} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10}\right) - 1 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

★ 分散 $\boldsymbol{V(X)}$ 以下，$E(X) = m$ とする．

$$\boldsymbol{V(X) = E\left((X - m)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\{(x_k - m)^2 p_k\right\}} \quad \text{公式 1}$$

$$\boldsymbol{= E(X^2) - \{E(X)\}^2} \quad \text{公式 2}$$

(4) X の標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{1} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

★ 標準偏差 $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

分散 $V(X)$ は X の単位の 2 乗なので，その正の平方根 $\sigma(X)$ をとることによって，X の単位に合わせたものが標準偏差．
標準偏差を考えることにより，X やその偏差などと標準偏差の加減乗除に意味がでてくる．