反射テスト　統計　確率変数と分散　01

1.　下表は確率変数 X の確率分布表である. 次の問に答えよ.

(S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	p

(1)　p を求めよ.

(2)　X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ.

(3)　X の分散 $V(X)$ を求めよ.

© 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

2. 下表は確率変数 X の確率分布表である. 次の問に答えよ.

(S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p

(1) p を求めよ.

(2) X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ.

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ.

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

反射テスト　統計　確率変数と分散　01　解答解説

1.　下表は確率変数 X の確率分布表である．次の問に答えよ．

（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分 ）

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	p

(1)　p を求めよ．

確率の和は 1 であるから，　$p = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

★ 確率の和は 1.

★ 確率変数と確率分布表　次の条件を満たす X を **確率変数** という．

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_x	p_3	$\cdots$	p_n	1

X の各値 x_k に対して，それが起こる確率を $P(X = x_k)$ で表す．つまり，

$P(\, X = x_k\,) = p_k$ と表せば，次が成り立つ．

$p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$, $\cdots$, $p_n \geqq 0$　かつ　$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

X と P の関係を表にしたものを **確率分布表** という．

(2)　X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ．

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{2+2+3}{4} = \mathbf{\frac{7}{4}}$$

★ 期待値 (平均)　$\boldsymbol{E(X) = \sum_{k=1}^{n} \{x_k P(X = x_k)\}}$

$\boldsymbol{= \sum_{k=1}^{n} (x_k p_k)}$

(3)　X の分散 $V(X)$ を求めよ．

★ 統計は表　基本的に公式 2 の方が早いが，ここではあえて表を用いて公式 1 を考えてみる．

X	1	2	3	和
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$X - E(X)$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	
$\{X - E(X)\}^2$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{16}$	
$\{X - E(X)\}^2 \cdot P(X)$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{44}{64}$

よって，分散は　$V(X) = \frac{44}{64} = \mathbf{\frac{11}{16}}$　☆分散の公式 1 参照

★ 分散 $\boldsymbol{V(X)}$　以下，$E(X) = m$ とする．

$$\boldsymbol{V(X) = E\left((X-m)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\{(x_k - m)^2 p_k\right\}} \quad \text{公式 1}$$
$$\boldsymbol{= E(X^2) - \{E(X)\}^2} \quad \text{公式 2}$$

☆確率を人数に例えるとイメージしやすい．
この場合なら，偏差 $X - E(X)$ の人が $P(X)$ 人いると考える．全部で 1 人と考えるわけだ．
$X = 1$ のときは $1 - E(X)$ の人が $\frac{1}{2}$ 人いる．これら (偏差の 2 乗 $\times$ 人数 $P(X)$) を全て加えて
平均化したものが分散である．人数は全部で 1 人だから，結局 $\div 1$ は計算する必要がない．

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 下表は確率変数 X の確率分布表である. 次の問に答えよ.

(S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p

(1) p を求めよ.

確率の和は 1 であるから,

$$p = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) X の期待値 (平均) $E(X)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3+4+3}{6} = \mathbf{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ.

★ 統計は表 基本的に公式 2 の方が早いが, ここではあえて表を用いて公式 1 を考えてみる.

X	1	2	3	和
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1
$X - E(X)$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\{X - E(X)\}^2$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$	
$\{X - E(X)\}^2 \cdot P(X)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{5}{9}$

よって, 分散は $V(X) = \mathbf{\frac{5}{9}}$

☆別解 ★分散の公式 2 早い方法. たいていの場合, 作業はこちらでした方がいいだろう.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6}\right) - \frac{25}{9} \\ &= \left(\frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6}\right) - \frac{25}{9} \\ &= \frac{20}{6} - \frac{25}{9} \\ &= \frac{30}{9} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)