反射テスト　統計　確率分布表と期待値　01

1.　1 枚の硬貨を 3 回続けて投げたとき，表の出る回数を X とする．(S 級 25 秒，A 級 1 分 20 秒，B 級 3 分，C 級 5 分)

(1)　以下の確率分布表をうめよ．

X	0	1	2	3	計
P					1

(2)　X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

2. サイコロを 3 回続けて投げたとき, 3 の倍数の目が出る回数を X とする.

(S 級 50 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) 以下の確率分布表をうめよ.

X	0	1	2	3	計
P					1

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ.

反射テスト　統計　確率分布表と期待値　01　解答解説

1.　1 枚の硬貨を 3 回続けて投げたとき，表の出る回数を X とする．(S 級 25 秒，A 級 1 分 20 秒，B 級 3 分，C 級 5 分)

(1)　以下の確率分布表をうめよ．

X	0	1	2	3	計
P	$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$	1

★ 反復試行の確率　確率 p の事象が n 回中 r 回出現する確率は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}}$

$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-0}=1\cdot1\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}=1\cdot\frac{1}{8}\cdot1=\frac{1}{8}$

★ 確率の表現の例
$$\begin{cases} P(\,X=x_k\,) & X\text{ が 1 つの値 } x_k \text{をとる確率.}\\ P(\,X\leqq a\,) & X\text{ の値が } a \text{ 以下である確率.}\\ P(\,a\leqq X\leqq b\,) & X\text{ の値が } a \text{ 以上 } b \text{ 以下である確率.}\end{cases}$$

★ 確率変数と確率分布表　次の条件を満たす X を **確率変数** という．

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_x	p_3	$\cdots$	p_n	1

X の各値 x_kに対して，それが起こる確率を $P(X=x_k)$ で表す．つまり，
$P(\,X=x_k\,)=p_k$ と表せば，次が成り立つ．
$p_1\geqq0$，$p_2\geqq0$，$\cdots$，$p_n\geqq0$　かつ　$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$．
X と P の関係を表にしたものを **確率分布表** という．

(2)　X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$
$$=0+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{12}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

★ 期待値 (平均)
$$\boldsymbol{E(X)=\sum_{k=1}^{n}\{x_k\,P(X=x_k)\}=\sum_{k=1}^{n}(x_kp_k)}$$

☆確率を人数に例えると，期待値が平均とも言われることをイメージしやすい．
この場合なら，$X=0$ となる人が $\frac{1}{8}$ 人いると考え，その積 0 を考える．
$X=1$ となる人は $\frac{3}{8}$ 人だから，その積は $\frac{3}{8}$. 順にそう考えて，各積の総和をとる．
人数は全部で 1 人だから，その総和を $\div1$ したものが平均となる．

☆上の確率分布表の下に各々の積を計算し，和を計算しよう．統計は表を利用すると作業が早い．

X	0	1	2	3	計
P	$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$	1
$X\cdot P$	**0**	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{6}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

☆「確率分布が左右対称⇒期待値が真ん中」つまり計算する必要がない．

2. サイコロを 3 回続けて投げたとき，3 の倍数の目が出る回数を X とする．

（ S 級 50 秒，A 級 1 分 30 秒，B 級 3 分，C 級 5 分 ）

(1) 以下の確率分布表をうめよ．

X	0	1	2	3	計
P	$\mathbf{\frac{8}{27}}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{27}}$	1

★ 反復試行の確率　確率 p の事象が n 回中 r 回出現する確率は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r\, (1-p)^{n-r}}$

$$P(X=0) = {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-0} = 1\cdot 1\cdot\frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-1} = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-2} = 3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=3) = {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-3} = 1\cdot\frac{1}{27}\cdot 1 = \frac{1}{27}$$

☆和が 1 になるか確かめる癖をつけよう．

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$$E(X) = 0\times\frac{8}{27} + 1\times\frac{4}{9} + 2\times\frac{2}{9} + 3\times\frac{1}{27}$$

$$= 0 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \mathbf{1}$$

☆別解　**★ 統計は表**

X	0	1	2	3	計
P	$\mathbf{\frac{8}{27}}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{27}}$	1
$X\cdot P$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\mathbf{1}$

☆期待値の 1 は 3 回投げたら 1 回起こることを表す．まさに期待される値（回数）である．
確率 $\frac{1}{3}$ であれば，3 回の試行中 1 回起こることと同義．$E(X) = 3\times\frac{1}{3} = 1$ と考えれば早い．