

反射テスト 統計 分散 01

1. 以下の x_n について次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級2分40秒, B級3分50秒, C級5分)

$$x_1 = 1.4, x_2 = 1.2, x_3 = 1.6, x_4 = 0.6$$

- (1) x_n の平均 \bar{x} を求めよ.

- (2) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n - \bar{x})^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	和
x_n	1.4	1.2	1.6	0.6	
$x_n - \bar{x}$					
$(x_n - \bar{x})^2$					

- (3) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n)^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	和
x_n	1.4	1.2	1.6	0.6	
$(x_n)^2$					

- (4) (3)の結果を用いて, $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 (x_n)^2 - \bar{x}^2$ を求めよ.

2. 以下の x_n について次の間に答えよ. (S 級 2 分, A 級 3 分 20 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 6 分)

$$x_1 = 1.8, x_2 = 1.2, x_3 = 1.6, x_4 = 1.9, x_5 = 2.0$$

(1) x_n の平均 \bar{x} を求めよ.

(2) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n - \bar{x})^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	5	和
x_n	1.8	1.2	1.6	1.9	2.0	
$x_n - \bar{x}$						
$(x_n - \bar{x})^2$						

(3) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n)^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	5	和
x_n	1.8	1.2	1.6	1.9	2.0	
$(x_n)^2$						

(4) (3) の結果を用いて, $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 (x_n)^2 - \bar{x}^2$ を求めよ.

反射テスト 統計 分散 01 解答解説

1. 以下の x_n について次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級2分40秒, B級3分50秒, C級5分)

$$x_1 = 1.4, x_2 = 1.2, x_3 = 1.6, x_4 = 0.6$$

(1) x_n の平均 \bar{x} を求めよ.

$$\bar{x} = \frac{1.4 + 1.2 + 1.6 + 0.6}{4} = 4.8/4 = \mathbf{1.2}$$

★ 平均 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

(2) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n - \bar{x})^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	和
x_n	1.4	1.2	1.6	0.6	4.8
$x_n - \bar{x}$	0.2	0.0	0.4	-0.6	0.0
$(x_n - \bar{x})^2$	0.04	0.00	0.16	0.36	0.56

よって, $(x_n - \bar{x})^2$ の平均は, $0.56/4 = \mathbf{0.14}$

☆これが x_n の分散である. このように統計は **表** でまとめると作業が早い.

★ 偏差 $x_n - \bar{x}$ ← ☆平均との差

★ 分散 公式1 $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ ← ☆偏差の2乗の平均

(3) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n)^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	和
x_n	1.4	1.2	1.6	0.6	4.8
$(x_n)^2$	1.96	1.44	2.56	0.36	6.32

よって, $(x_n)^2$ の平均は, $6.32/4 = \mathbf{1.58}$

(4) (3)の結果を用いて, $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 (x_n)^2 - \bar{x}^2$ を求めよ.

$$\begin{aligned} (x_n)^2 - \bar{x}^2 &= 1.58 - 1.2^2 \\ &= 1.58 - 1.44 \\ &= \mathbf{0.14} \end{aligned}$$

☆これも x_n の分散である. (2)の求め方と(3)・(4)の求め方が等しい結果を導くことを実感してほしい.

★ 分散 公式2 $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$

平均の表記をオーバーラインで表せば, この公式2は $\overline{x^2} - \bar{x}^2$ と覚えやすい形で書ける.

公式1と2が等しいことの証明は次のページに記す.

☆分散は s_x^2 と表す. さらに分散の正の平方根 s_x を **標準偏差** という.

★ 偏差値 $50 + \frac{x_n - \bar{x}}{s_x} \times 10$

2. 以下の x_n について次の間に答えよ。(S級2分, A級3分20秒, B級4分40秒, C級6分)

$$x_1 = 1.8, x_2 = 1.2, x_3 = 1.6, x_4 = 1.9, x_5 = 2.0$$

- (1) x_n の平均 \bar{x} を求めよ.

$$\bar{x} = \frac{1.8 + 1.2 + 1.6 + 1.9 + 2.0}{5} = 8.5/5 = 1.7$$

- (2) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n - \bar{x})^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	5	和
x_n	1.8	1.2	1.6	1.9	2.0	8.5
$x_n - \bar{x}$	0.1	-0.5	-0.1	0.2	0.3	0.0
$(x_n - \bar{x})^2$	0.01	0.25	0.01	0.04	0.09	0.40

よって, $(x_n - \bar{x})^2$ の平均は, $0.40/5 = 0.08$

- (3) 以下の表の空欄を埋めて, $(x_n)^2$ の平均を求めよ.

n	1	2	3	4	5	和
x_n	1.8	1.2	1.6	1.9	2.0	8.5
$(x_n)^2$	3.24	1.44	2.56	3.61	4.00	14.85

よって, $(x_n)^2$ の平均は, $14.85/5 = 2.97$

- (4) (3) の結果を用いて, $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 (x_n)^2 - \bar{x}^2$ を求めよ.

$$\begin{aligned} (x_n)^2 - \bar{x}^2 &= 2.97 - 1.7^2 \\ &= 2.97 - 2.89 \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

☆公式の証明 公式1と公式2が等しいことを証明する.

$$\text{★分散 公式1 } s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad \text{公式2 } s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k\bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{n} \cdot n\bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$