

反射テスト 論理 背理法 02

1. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級 2分 20秒, A級 3分 15秒, B級 4分 20秒, C級 6分)

命題 「 $\sqrt{6}$ が無理数ならば, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ は無理数である。」

2. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{10}$ が無理数ならば, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ は無理数である。」

反射テスト 論理 背理法 02 解答解説

1. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{6}$ が無理数ならば, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ は無理数である。」

★ 背理法

- ① 結論の否定を仮定する.
- ② ① から矛盾を導く.
- ③ ① の仮定が否定され, 命題が証明される.

ある意味, 対偶の証明になる.

証明

- ① 「 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ が無理数ではない」と仮定する.

- ② 仮定から, 有理数 r を用いて, $r = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ と表そう.

$$\text{変形して, } r^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{r^2 - 5}{2} = \sqrt{6}.$$

この等式の左辺は有理数の四則演算であるから有理数.

右辺は命題の条件「 $\sqrt{6}$ が無理数」であることから無理数.

これは矛盾である.

- ③ 背理法により, 仮定「 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ が無理数ではない」が否定されるから,
「 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ は無理数」である.

2. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{10}$ が無理数ならば, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ は無理数である。」

★ 背理法

- ① 結論の否定を仮定する.
- ② ① から矛盾を導く.
- ③ ① の仮定が否定され, 命題が証明される.

ある意味, 対偶の証明になる.

証明

① 「 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ が無理数ではない」と仮定する.

② 仮定から, 有理数 r を用いて, $r = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ と表そう.

$$\text{変形して, } r^2 = 7 - 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{7 - r^2}{2} = \sqrt{10}.$$

この等式の左辺は有理数の四則演算であるから有理数.

右辺は命題の条件「 $\sqrt{10}$ が無理数」であることから無理数.

これは矛盾である.

③ 背理法により, 仮定「 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ が無理数ではない」が否定されるから,
「 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ は無理数」である.