

反射テスト 論理 背理法 01

1. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{2}$ が無理数ならば, $\sqrt{2} + 1$ は無理数である。」

2. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{2}$ が無理数ならば, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数である。」

反射テスト 論理 背理法 01 解答解説

1. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{2}$ が無理数ならば, $\sqrt{2} + 1$ は無理数である。」

★ 背理法

- ① 結論の否定を仮定する.
- ② ① から矛盾を導く.
- ③ ① の仮定が否定され, 命題が証明される.

ある意味, 対偶の証明になる.

証明

- ① 「 $\sqrt{2} + 1$ が無理数ではない」と仮定する.
- ② 仮定から, 有理数 r を用いて, $r = \sqrt{2} + 1$ と表そう.
変形して, $r - 1 = \sqrt{2}$.
この等式の左辺は有理数の差であるから有理数.
右辺は命題の条件「 $\sqrt{2}$ が無理数」であることから無理数.
これは矛盾である.
- ③ 背理法により, 仮定「 $\sqrt{2} + 1$ が無理数ではない」が否定されるから,
「 $\sqrt{2} + 1$ は無理数」である.

2. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。(S級2分20秒, A級3分15秒, B級4分20秒, C級6分)

命題 「 $\sqrt{2}$ が無理数ならば, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数である。」

★ 背理法

- ① 結論の否定を仮定する.
- ② ① から矛盾を導く.
- ③ ① の仮定が否定され, 命題が証明される.

ある意味, 対偶の証明になる.

証明

① 「 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が無理数ではない」と仮定する.

② 仮定から, 有理数 r を用いて, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と表そう.

変形して, $2r = \sqrt{2}$.

この等式の左辺は有理数の積であるから有理数.

右辺は命題の条件「 $\sqrt{2}$ が無理数」であることから無理数.

これは矛盾である.

③ 背理法により, 仮定「 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が無理数ではない」が否定されるから,
「 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数」である.